ELEC-C3210 Materiaalien ominaisuudet **5. laskuharjoitus 14.2.-15.2.2019**

Valmistaudu harjoituksiin tekemällä etukäteen mahdollisimman paljon tehtäviä (tai mahdollisimman pitkälle). Laskuja saa tehdä ryhmätyönä. Laskuja voi laskea vielä harjoituksen ajan. Kun harjoitus päättyy, lasketut tehtävät kirjataan ylös. Jokainen tekee omat ratkaisunsa.

1. Neste, jonka viskositeetti on η, virtaa tasaisesti (virtausnopeus ei muutu ajan funktiona) poikkileikkaukseltaan ympyränmuotoisessa, vaakasuorassa putkessa, jonka säde on R, pituus L ja paine-ero putken päiden välillä Δp. Merkitään etäisyyttä putken keskiakselilta r:llä. Osoita, että nesteen virtausnopeus on

$$v_y(r) = \frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right)\frac{\Delta p}{L}.$$

Ohje: viskoosin, kokoonpuristumattoman, pelkästään y-suuntaan virtaavan nesteen virtausyhtälö on

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 v_y + \frac{f}{\rho}.$$

Putken sylinterisymmetrian vuoksi kannattaa käyttää sylinterikoordinaatistoa, jolloin virtausnopeus on ainoastaan r:n funktio. Tällöin

$$\nabla^2 v_y = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_y}{\partial r}\right).$$

2. Käyttäen virtausnopeuden lauseketta

$$v_y(r) = \frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right)\frac{\Delta p}{L}$$

laske kokonaisvirtaus putken poikkipinta-alan läpi. Tulos on ns. Poiseuillen yhtälö.

3. Sylinterinmuotoinen höyryputki on vuorattu eristekerroksella. Eristeputken sisäpinnalla (säde R_1) lämpötila on vakio T_1 ja ulkopinnalla (säde R_2) T_2. a) Mikä on eristeputken lämpötilajakauma r:n funktiona tasapainotilanteessa? b) Kuinka suuri on lämpövirta eristekerroksen läpi? Vihje: käytä tehtävässä 1 annettua Laplacen operaattorin sylinterikoordinaattiesitystä.

4. Puolijohteita voidaan seostaa päällystämällä ensin puolijohteen pinta seostusatomeilla ja sen jälkeen pitämällä puolijohdetta korkeassa lämpötilassa, jolloin seostusatomit diffusoituvat puolijohteen sisään. Tällaisessa ns. rajoitetun lähteen diffuusiossa seostusatomikonsentraatio syvyyden x ja ajan t funktiona on

$$n(x,t) = \frac{Q}{\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

missä Q on vakio (verrannollinen lähdeatomien määrään). Osoita, että tämä funktio on diffuusioyhtälön $\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ ratkaisu.