Yhtenäisyys

Määritelmä 11.1

Metrinen avaruus X on **epäyhtenäinen** (disconnected), jos on olemassa osajoukot $A, B \subset X$, joille

(i) $A \cup B = X$

(ii) $A \neq \emptyset \neq B$

(iii) $A \cap B = \emptyset$

(iv) A ja B ovat avoimia joukkoja avaruudessa X.

Jos avaruus X ei ole epäyhtenäinen, niin se on **yhtenäinen** (connected).

- Osajoukon $E \subset X$ (epä)yhtenäisyys määritellään tulkitsemalla E aliavaruutena; ts. joukkojen A, B täytyy olla avoimia aliavaruudessa E.
- Normiavaruuden avoin ja yhtenäinen osajoukko $D \subset E$ on **alue** (engl. domain, jolla on tosin muitakin merkityksiä).

Esim. a) $\emptyset$ ja $\{x\}$ aina yhtenäisiä, kun $x \in X$

b) X:ssä diskreetti metriikka ja $\# X \geq 2$

$\Rightarrow$ kaikki osajoukot E, joille $\# E \geq 2$, ovat epäyhtenäisiä

c) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \underbrace{]-\infty, 0[}_{=A} \cup \underbrace{]0, \infty[}_{=B}$

on epäyhtenäinen

Huom: On paljon hankalampaa osoittaa, että $\mathbb{R}$ on yhtenäinen!

(ks. alla)

Yhtenäisyyden vaihtoehtoisia muotoja

Lause 11.2

Metriselle avaruudelle X seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1. *X on epäyhtenäinen.*
2. *$X = C \cup D$, jossa C, D erillisiä, **suljettuja** ja epätyhjiä.*
3. *On olemassa avoin ja suljettu osajoukko $\emptyset \neq A \neq X$.*
4. *On olemassa jatkuva surjektio $f : X \to \{0, 1\}$.*

$\{0,1\}$ diskreetti metriikka!

1 ⇒ 2: Jos $X = A \cup B$, $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$, A, B avoimia, niin $C = X \setminus A$, $D = X \setminus B$ ovat vaaditut suljetut joukot.

2 ⇒ 3: Valitaan $A = C$ jolloin $X \setminus A = D$ suljettu
⇒ A on avoin ja suljettu

3 ⇒ 4: Määritellään $f : X \to \{0,1\}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \notin A \end{cases}$

Oletusten nojalla f on surjektio.
Koska $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$, $f^{-1}[\{0,1\}] = X$, $f^{-1}[\{0\}] = A$ ja $f^{-1}[\{1\}] = X \setminus A$ ovat avoimia, niin f on jatkuva (avointen alkukuvat avoimia!)

4 ⇒ 1: Valitaan $A = f^{-1}[\{0\}]$, $B = f^{-1}[\{1\}]$, sillä $\{0\}$, $\{1\}$ avoimia $\{0,1\}$:ssä. □

Yhteys jatkuvuuteen

Lause 11.3

1. *Jos X on yhtenäinen ja $f : X \to Y$ jatkuva, niin kuvajoukko $f[X] \subset Y$ on yhtenäinen.*
2. *$A \subset \mathbf{R}$ on yhtenäinen joukko, jossa vähintään kaksi pistettä $\Leftrightarrow$ $A \subset \mathbf{R}$ on väli.*
3. *Jos X on yhtenäinen ja $f : X \to \mathbf{R}$ on sellainen jatkuva funktio, että $f(x)f(y) < 0$ joillakin $x, y \in X$, niin on olemassa sellainen $z \in X$, että $f(z) = 0$.*
4. *Jos $D \subset \mathbf{R}^n$ on alue, niin sen pisteet voidaan yhdistää toisiinsa murtoviivalla $\gamma \subset D$.*

<u>Lause</u> Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva ja X yhtenäinen.

Silloin $f[X]$ on yhtenäinen.

<u>Tod.</u> (MONTA ERI TAPAA...) Jos $f[X]$ ei yhtenäinen, niin

$\exists$ jatkuva $g : f[X] \to \{0,1\}$

SURJEKTIO

$\Rightarrow g \circ f : X \to \{0,1\}$ jatkuva surjektio $\Rightarrow$ RR $\square$

<u>Seuraus</u> (i) Jos $X \approx Y$ ja X yhtenäinen, niin

Y on yhtenäinen.

(ii) Olkoon X yhtenäinen ja $f : X \to \mathbb{R}$ jatkuva.

Silloin $fX \subset \mathbb{R}$ on väli.

(iii) Jos X on yhtenäinen ja $f : X \to \mathbb{R}$ jatkuva, ja $\exists\, a,b \in X$

s.e. $f(a)f(b) \leq 0$, niin $\exists\ c \in X : f(c) = 0$.

Erikoistapaus: $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$: Bolzanon lause

<u>Esim.</u> $]a,b] \not\approx\ ]a,b[$. Syy: Jos $f :]a,b] \approx\ ]a,b[$,

niin $A = f^{-1}[\,]a, f(b)[\,]$, $B = f^{-1}[\,]f(b), b[\,]$

osoittavat $]a,b[$:n epäyhtenäisyyden.

<u>Esim.</u> $\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}$. Syy: Jos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homeomorfismi, niin
$(n \geq 2)$
f kuvaa yhtenäisen joukon $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$ epäyhtenäiselle $\mathbb{R} \setminus \{f(\bar{0}$

Lause Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ ja $\# E \geq 2$. Tällöin E on yhtenäinen

$\iff$ E on väli (myös ääretön jne.)

Todistetaan vain: $[a,b]$ on yhtenäinen.

Vastaoletus: $[a,b]$ epäyhtenäinen. Tällöin

$[a,b] = C \cup D$, jossa $C, D \neq \emptyset$, $C \cap D = \emptyset$, C, D suljettuja

$\Rightarrow$ C ja D kompakteja $\Rightarrow$ $C \times D$ kompakti (HT)

$\Rightarrow$ metriikka $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ saavuttaa jatkuvana

funktiona minimiinsä $C \times D$:ssä: $\exists\, x \in C, y \in D$,

joille $|x-y| > 0$ (koska $C \cap D = \emptyset$)

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x+y) \notin C \cup D$ RR

$\Rightarrow$ vastaoletus väärä ja väite tosi. $\square$

(Muut kohdat: Väisälä 14.15.)

Huom: Yhtenäinen $\Rightarrow$ väli on helppo:

Jos $x_0 \notin E \subset \mathbb{R}$, niin $A =]-\infty, x_0[\cap E$

$B =]x_0, \infty[\cap E$

ovat avoimia E:ssä ja osoittavat

E:n epäyhtenäisyyden, paitsi jos E on kokonaan

x_0:n vasemmalla/oikealla puolella.

(Ts. $a, b \in E$, $a < x_0 < b$, $x_0 \notin E \Rightarrow$ RR)

Lause Olkoon $G \subset \mathbb{R}^n$ alue, eli avoin ja yhtenäinen. Tällöin mitkä tahansa $a, b \in G$ voidaan yhdistää toisiinsa murtoviivalla G:ssä.

Tod. Valitaan $a \in G$ ja osoitetaan, että joukko

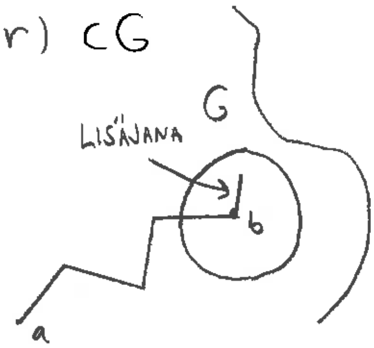
$$A = \{ b \in G \mid b \text{ voidaan yhdistää } a\text{:han murtoviivalla } G\text{:ssä} \}$$

on sekä avoin että suljettu.

(i) A avoin: Jos $b \in A$, niin $\exists\, B(b,r) \subset G$

$\Rightarrow$ kaikki $B(b,r)$:n pisteet $\in A$

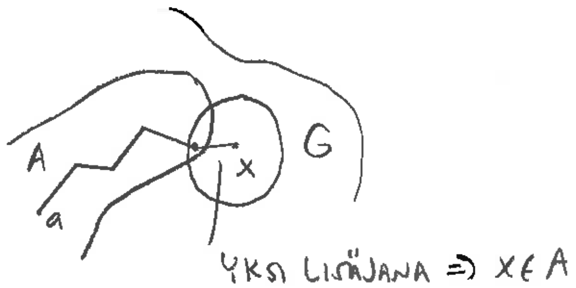
$\Rightarrow$ A avoin. (ja $\neq \emptyset$)



(ii) $G \setminus A$ avoin:

Jos $x \in G \setminus A$, niin valitaan taas $B(x,r) \subset G$

$\Rightarrow$ mikään $B(x,r)$:n piste $\notin A$, koska muuten RR:



$\Rightarrow B(x,r) \subset G \setminus A$.

$\Rightarrow$ A avoin ja suljettu G:ssä

RR, koska G yhtenäinen $\Rightarrow$ väite. □