Luento 6
Luotettavuus, koherentit järjestelmät (osa 2)
Vikaantumisprosessit ja käytettävyys

Jan-Erik Holmberg
Systeemianalyysin laboratorio
Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
Aalto-yliopiston perustieteiden korkeakoulu
PL 11100, 00076 Aalto
jan-erik.holmberg@aalto.fi

Rakennefunktio ja toimintapolut (1/2)

- Olkoot $P_1, \ldots, P_s$ koherentin järjestelmän minimitoimintapolut ja

$$\alpha_j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{jos kaikki } P_j\text{:n komponentit toimivat} \\ 0, \text{jos jokin } P_j\text{:n komponentti ei toimi} \end{cases}$$

Pätee

$$\alpha_j(\boldsymbol{x}) = \min_{i \in P_j} x_i = \prod_{i \in P_j} x_i$$

Järjestelmä toimii, jos jonkin toimintapolun komponentit toimivat

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{jos } \alpha_j(\boldsymbol{x}) = 1 \text{ jollekin toimintapolulle} \\ 0, \text{jos } \alpha_j(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ kaikille toimintapoluille} \end{cases}$$

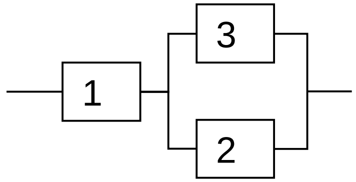
Rakennefunktio ja toimintapolut (2/2)

- Saadaan siis

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \max_j \alpha_j(\boldsymbol{x}) = \max_j \prod_{i \in P_j} x_i = 1 - \prod_{j=1}^{s}\left(1 - \prod_{i \in P_j} x_i\right)$$

  - Rakennefunktio on siis yksikäsitteisesti esitettävissä minimitoimintapolkujen <u>rinnakkaisjärjestelmänä</u>

- Esimerkki
  - minimitoimintapolut (1,1,0), (1,0,1)



$$\phi(\boldsymbol{x}) = 1 - (1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_1 x_2 x_3$$

Rakennefunktio ja katkosjoukot (1/2)

- Olkoot $C_1, \ldots, C_k$ koherentin järjestelmän minimikatkosjoukot ja

$$\beta_j(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{jos ainakin yksi komponentti } C_j\text{:ssä toimii} \\ 0, \text{jos mikään komponentti } C_j\text{:ssä ei toimi} \end{cases}$$

- Pätee

$$\beta_j(\boldsymbol{x}) = \max_{i \in C_j} x_i = 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - x_i)$$

- Järjestelmä ei toimi, jos jonkin minimikatkosjoukon kaikki komponentit pettävät

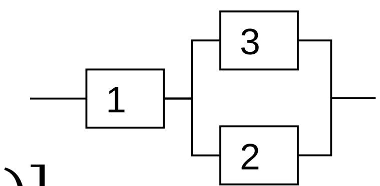
$$\phi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, \text{jos } \beta_j(\boldsymbol{x}) = 1 \text{ kaikille katkosjoukoille} \\ 0, \text{jos } \beta_j(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ jollekin katkosjoukoille} \end{cases}$$

Rakennefunktio ja katkosjoukot (2/2)

- Tällöin

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \min_j \beta_j(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{k} \beta_j(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \prod_{i \in C_j}(1 - x_i)\right)$$

- Rakennefunktio siis yksikäsitteisesti esitettävissä minimikatkosjoukkojen sarjajärjestelmänä
- Esimerkki
  - minimikatkosjoukot (1,0,0,), (0,1,1)



$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}) &= [1 - (1 - x_1)][1 - (1 - x_2)(1 - x_3)] \\ &= x_1[x_2 + x_3 - x_2 x_3] \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_1 x_2 x_3\end{aligned}$$

Järjestelmän luotettavuus

- Komponentin i tila on satunnaismuuttuja

$$X_i = \begin{cases} 0, \text{jos komponentti } i \text{ ei toimi} \\ 1, \text{jos komponentti } i \text{ toimii} \end{cases}$$

- Komponentin i luotettavuus $p_i = P[X_i = 1]$
  - Tilavektorista vastaavasti saadaan siis tn-vektori $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_n)$
  - Huom! Tarkasteluajankohta täsmennettävä, muuten ei mielekäs määritelmä
- Järjestelmän luotettavuus $r(\boldsymbol{p}) = P[\phi(\boldsymbol{x}) = 1]$
  - Käytetään myös termiä luotettavuusfunktio
  - Voidaan määrittää odotusarvona $r(\boldsymbol{p}) = E[\phi(\boldsymbol{x})]$, koska $\phi(\boldsymbol{x})$ on binäärimuuttuja
- Esimerkkejä
  - Sarjajärjestelmä toimii, jos sen kaikki komponentit toimivat (oletetaan nämä riippumattomiksi) ⇨

$$r(\boldsymbol{p}) = P[\phi(\boldsymbol{x}) = 1] = P\left[\prod_{i=1}^{n} X_i = 1\right] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i = 1] = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

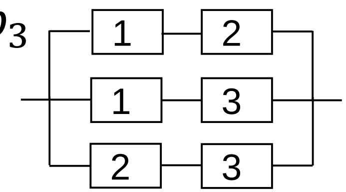
  - Rinnakkaisjärjestelmälle

$$r(\boldsymbol{p}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

Luotettavuuden laskennasta (1/3)

- Toimintapolut
  - Järjestelmä toimii, jos jokin toimintapolku kunnossa
  - Luotettavuus on siis tn sille, että tilavektorina on toimintapolku
  - Järjestelmän luotettavuus = toimintapolkujen tn:ien summa
  - Esim. 2/3-järjestelmän toimintapolut (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)

$$r(\boldsymbol{p}) = (1-p_1)p_2p_3 + (1-p_2)p_1p_3 + (1-p_3)p_1p_2 + p_1p_2p_3$$
$$= p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - 2p_1p_2p_3$$



  - Tn:ien p_i sijoittaminen X_i:iden paikalle rakennefunktiossa

$$\phi(X) = 1 - (1 - X_1X_2)(1 - X_1X_3)(1 - X_2X_3)$$

ei anna oikeaa odotusarvoa, koska tällöin tulee vääriä tulotermejä $(p_i)^2$.
Ts. binäärimuuttujille pätee

$$E\left[X_i^2\right] = E[X_i] = p_i$$

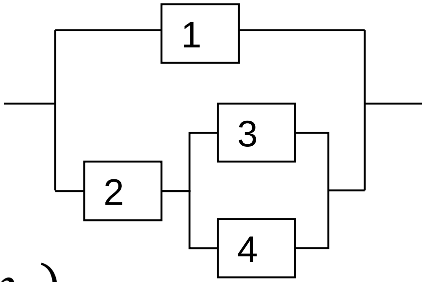
  - Sama luotettavuus saadaan odotusarvona

$$E[\phi(X)] = E[1 - (1 - X_1X_2)(1 - X_1X_3)(1 - X_2X_3)]$$
$$= E[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 - X_1^2X_2X_3 - X_1X_2^2X_3 - X_1X_2X_3^2 + X_1^2X_2^2X_3^2]$$
$$= E[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 - 2X_1X_2X_3] = r(\boldsymbol{p})$$

Luotettavuuden laskennasta (2/3)

- Katkosjoukot
  - Järjestelmä ei toimi, jos joku katkosjoukko toteutuu
  - Luotettavuus saadaan siis vähentämällä yhdestä tn sille, että tilavektori on katkosjoukko

  - Katkosjoukot
    (0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,0,1,1) ja (0,1,0,0)
  - Näin luotettavuudeksi saadaan



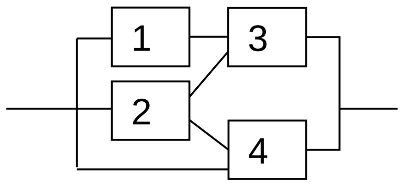
$$r(\boldsymbol{p}) = 1 - (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)$$
$$-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_4 - (1-p_1)(1-p_2)p_3(1-p_4)$$
$$-(1-p_1)(1-p_2)p_3p_4 - (1-p_1)p_2(1-p_3)(1-p_4)$$

- Ehdollistaminen
  - Järjestelmän toiminta voidaan ehdollistaa jonkun avainkomponentin toiminnalle

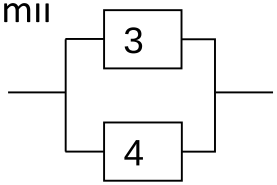
$$r(\boldsymbol{p}) = P\big(\phi(1_i, x_{-i})\big)P(x_i = 1) + P\big(\phi(0_i, x_{-i})\big)P(x_i = 0)$$
$$= r(1_i, p_{-i})p_{-i} + r(0_i, p_{-i})(1 - p_{-i})$$

Luotettavuuden laskennasta (3/3)

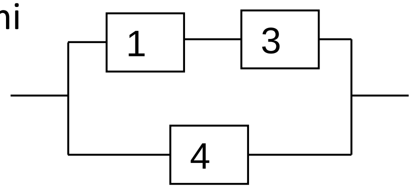
- Ehdollistaminen (jatk.)
  - Tarkastellaan järjestelmää



  - Ehdollistetaan järjestelmän komponentille 2
    A: Komponentti 2 toimii



B: Ei toimi



  - A:n luotettavuus

$$r(\boldsymbol{p}^A) = 1 - (1 - p_3)(1 - p_4)$$

  - B:n luotettavuus

$$r(\boldsymbol{p}^B) = 1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_4)$$

  - Koko järjestelmän luotettavuus siis

$$r(\boldsymbol{p}) = (1 - (1 - p_3)(1 - p_4))p_2 + (1 - (1 - p_1 p_3)(1 - p_4))(1 - p_2)$$

Luotettavuuden tärkeys

- Koherentissa järjestelmässä komponentin luotettavuuden tärkeyttä kuvaa

$$I_r(i) = \frac{\partial r(p)}{\partial p_i}, i = 1, \dots, n$$

  - Ts. miten paljon järjestelmän luotettavuus muuttuu, jos yksittäisten komponentin luotettavuus muuttuu?
  - Luotettavuuden ehdollistamiskaavaa käyttäen tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$$I_r(i) = r(1_i, p_{-i}) - r(0_i, p_{-i})$$

  - Kunnossapito kannattaa pyrkiä kohdentamaan luotettavuudeltaan tärkeimpiin komponentteihin
  - Esim. sarjajärjestelmässä i:nnen komponentin luotettavuus

$$r(\boldsymbol{p}) = \prod_{j=1}^{n} p_j$$

$$I_r(i) = \frac{\partial r(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} = \prod_{j \neq i} p_j$$

Ts. tärkeys suurin komponentille, jonka luotettavuus pienin (tällöin muiden tulo suurin) – ”ketju on yhtä vahva kuin sen heikoin lenkki”

Huom! Riskitärkeysmitoista tulee myöhemmin lisää. Tätä mittaa kutsutaan myös Birnbaumin mitaksi

Laskenta-approksimoinneista (1/4)

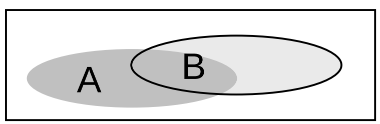
- Huomioita
  - Rakennefunktion käyttöön perustuvat em. laskutavat antavat tarkan luotettavuusarvon
  - Komponenttien oletetaan kuitenkin olevan toisistaan riippumattomia vailla yhteisiä vikaantumissyitä
  - Isoissa järjestelmissä tarkka laskenta tulee raskaaksi ⇨ tarvitaan approksimaatioita
  - Koherenttien järjestelmien approksimaatioiden ääripäinä sarja- ja rinnakkaisjärjestelmät, joten

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \leq r(p) \leq 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i)$$

    » Ei kuitenkaan kovin käyttökelpoinen – jos esim. neljä komponenttia yhteisellä tn:llä $p = 0.9$, niin rajoiksi saadaan 0.94 = 0.6561 ja 1−(1−0.9)·4 = 0.9999, mitkä ovat liian väljät

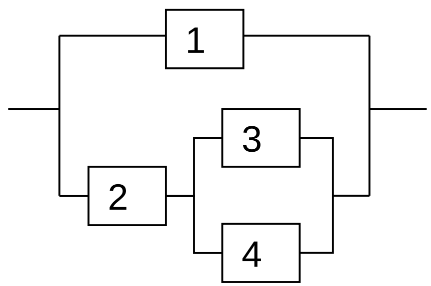
Laskenta-approksimoinneista (2/4)

- Minimitoimintapolut ja -katkosjoukot
  - Järjestelmä voidaan kuvata sarjaankytkettyinä minimikatkosjoukkoina tai rinnakkainkytkettyinä minimitoimintapolkuina
  - Näistä saadaan luotettavuusrajat
    $$\prod_{j=1}^{k}\left[1-\prod_{i\in C_j}(1-p_i)\right] \le r(p) \le 1-\prod_{j=1}^{s}\left[1-\prod_{i\in P_j} p_i\right]$$
  - Komponentit voivat olla useilla toimintapoluilla ja useissa katkosjoukoissa, kyse approksimaatiosta



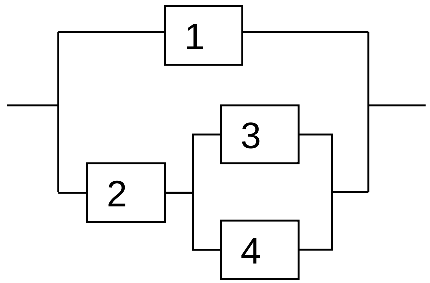
Laskenta-approksimoinneista (3/4)

- Esimerkki
  - Minimitoimintapolut
    {1}, {2,3},{2,4}
  - Minimikatkosjoukot
    {1,2},{1,3,4}

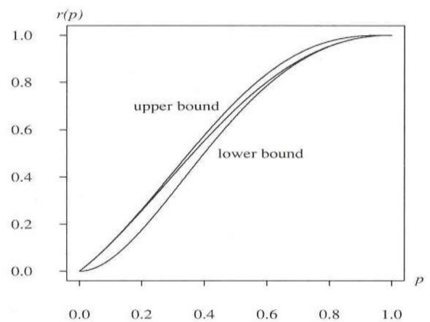


Laskenta-approksimoinneista (4/4)

- Esimerkki jatkuu
  - Minimitoimintapoluista saadaan luotettavuudelle yläraja
  $$r(\boldsymbol{p}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2 p_3)(1 - p_2 p_4)$$
  - Minimikatkosjoukoista saadaan luotettavuudelle alaraja
  $$r(\boldsymbol{p}) = [1 - (1 - p_1)(1 - p_2)] \times [1 - (1 - p_1)(1 - p_3)(1 - p_4)]$$



  - Jos kaikkien komponenttien tn:t samoja, niin
  $$(1 - (1 - p)^2)(1 - (1 - p)^3) \leq r(\boldsymbol{p}) \leq 1 - (1 - p)(1 - p^2)^2$$



  - Tarkka arvo voidaan laskea seuraavista toisensa poissulkevista katkosvektoreista (0,0,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,0,0)

Komponenttien elinikä

- Komponentin elinikää kuvataan satunnaismuuttujalla T
  - Tiheysfunktio $f(t)$, kertymäfunktio $F(t)$
- Eloonjäämisfunktio $S(t)$ (survivor function)
  - on se tn, että komponentti toimii ainakin ajanhetkeen t asti, ts. $S(t) = P[T \geq t], t \geq 0$
- Huomioita
  - Yleensä oletetaan, että komponentti on toimintakuntoinen tarkastelujakson alussa

$$\Rightarrow S(0) = 1$$

  - Jatkuville tn-jakaumille pätee

$$1 = P[T \leq t] + P[T \geq t] = F(t) + S(t)$$
$$\Rightarrow S(t) = 1 - F(t)$$

  - Edelleen

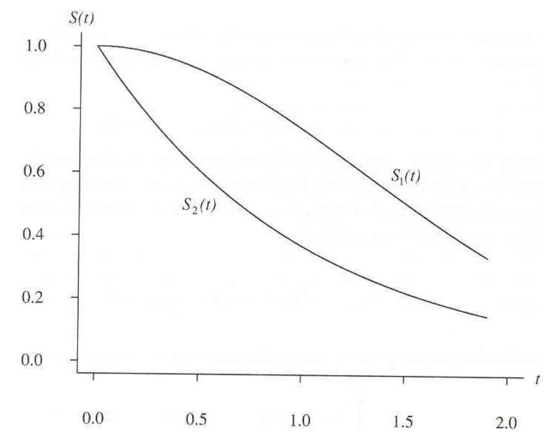
$$\lim_{t\to\infty} S(t) = \lim_{t\to\infty}\big(1 - F(t)\big) = 1 - \lim_{t\to\infty} F(t) = 0$$

  - Ehdollinen eloonjäämisfunktio $S_{T|T\geq a}(t)$on tn sille, että järjestelmä toimii ainakin hetkeen t asti ehdolla, että se on toiminut hetkeen a asti (so. $t \geq a$)

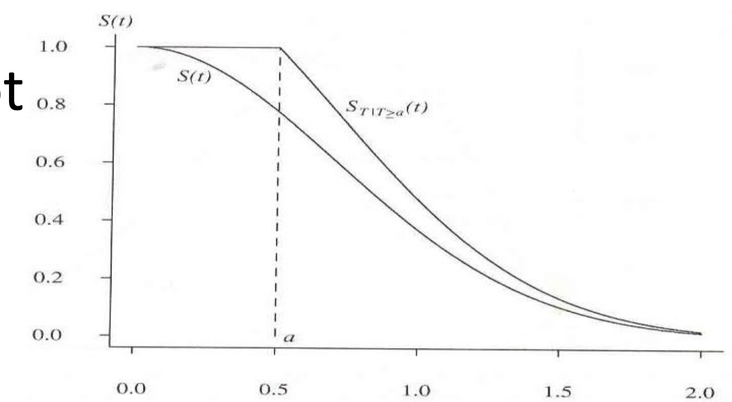
$$S_{T|T\geq a}(t) = \frac{P[T \geq a \wedge T \geq t]}{P[T \geq a]} = \frac{P[T \geq t]}{P[T \geq a]} = \frac{S(t)}{S(a)}, t \geq a$$

Esimerkkejä eloonjäämisfunktioista

- Seuraavista eloonjäämisfunktio $S_1(t)$ on parempi, koska $S_1(t) \geq S_2(t)$



- Ehdolliset eloonjäämisfunktiot
  - Esim. henkivakuutusten myyntiehdot voidaan ehdollistaa sille, minkä ikäinen vakuutettava henkilö on



Riskitaajuusfunktio

- Riskitaajuusfunktio (hazard function) kertoo, miten altis hetkeen t asti toiminut komponentti on vikaantumaan hetkellä t
  - Sovelletaan raja-arvolaskentaa

$$P[t \leq T \leq t + \Delta | T \geq t] = \frac{P[t \leq T \leq t + \Delta]}{P[T \geq t]}$$

$$= \frac{S(t) - S(t + \Delta)}{S(t)}$$

  - Keskimääräinen vikaantumistn Δ levyisellä intervallilla

$$\frac{S(t) - S(t + \Delta)}{S(t)\Delta}$$

  - Hetkelliseksi vikaantumistaajuudeksi saadaan

$$h(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{S(t) - S(t + \Delta)}{S(t)\Delta}$$

  - Todennäköisyystulkinta: millä tn:llä komponentti vikaantuu seuraavan Δ pituisena jaksona?

$$h(t)\Delta = P[t \leq T \leq t + \Delta | T \geq t]$$

- Huom! Myös termiä vioittuvuusfunktio käytetään samassa merkityksessä

Muita funktioita

- Kumulatiivinen riskitaajuusfunktio

$$H(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau = \int_0^t -\frac{S'(\tau)}{S(\tau)}d\tau$$
$$= -\ln\big(S(t)\big) + \ln\big(S(0)\big) = -\ln\big(S(t)\big)$$

  - Saadaan siis $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} H(t) = \infty$
  - $H(t)$ kasvava ja $H(0) = 0$

- Jäljellä oleva elinikäodote

$$L(t) = E[T - t|T \geq t]$$

  - Laskentaa varten tarvitaan ehdollinen tn-jakauma

$$f_{T|T\geq t}(\tau) = \frac{f(\tau)}{S(t)}, \tau \geq t$$

  - Tällöin

$$L(t) = E[T - t|T \geq t] = \int_t^\infty (\tau - t)\frac{f(\tau)}{S(t)}d\tau = \frac{1}{S(t)}\int_t^\infty \tau f(\tau)\,d\tau - t$$

Funktioista toiseen siirtymiset

	$f(t)$	$S(t)$	$h(t)$	$H(t)$	$L(t)$
$f(t)$	$\cdot$	$\int_t^\infty f(\tau)d\tau$	$\dfrac{f(t)}{\int_t^\infty f(\tau)d\tau}$	$-\log\left[\int_t^\infty f(\tau)d\tau\right]$	$\dfrac{\int_t^\infty \tau f(\tau)d\tau}{\int_t^\infty f(\tau)d\tau} - t$
$S(t)$	$-S'(t)$	$\cdot$	$\dfrac{-S'(t)}{S(t)}$	$-\log S(t)$	$\dfrac{1}{S(t)}\int_t^\infty S(\tau)d\tau$
$h(t)$	$h(t)e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}$	$e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}$	$\cdot$	$\int_0^t h(\tau)d\tau$	$\dfrac{\int_t^\infty e^{-\int_0^\tau h(y)dy}d\tau}{e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau}}$
$H(t)$	$H'(t)e^{-H(t)}$	$e^{-H(t)}$	$H'(t)$	$\cdot$	$e^{H(t)}\int_t^\infty e^{-H(\tau)}d\tau$
$L(t)$	$\dfrac{1+L'(t)}{L(t)}e^{-\int_0^t \frac{1+L'(\tau)}{L(\tau)}d\tau}$	$e^{-\int_0^t \frac{1+L'(\tau)}{L(\tau)}d\tau}$	$\dfrac{1+L'(t)}{L(t)}$	$\int_0^t \dfrac{1+L'(\tau)}{L(\tau)}d\tau$	$\cdot$

Eksponenttijakauma

- Elinikäfunktiot

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^t \frac{d}{dt}\left(-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right) = \left[1 - e^{-\lambda t}\right]$$

$$S(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$$

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

$$L(t) = \frac{1}{\lambda}$$

- Eksponenttijakauma on muistiton

$$P[T - h \geq t | T \geq h] = \frac{P[T \geq h + t]}{P[T \geq h]} = \frac{S(h + t)}{S(h)} = \frac{e^{-\lambda(h+t)}}{e^{-\lambda h}} = e^{-\lambda t} = S(t)$$

$$= P[T \geq t]$$

Elinikäodote

- Elinikäodote on vakio

$$L(0) = E[T] = \int_0^\infty \tau\lambda e^{-\lambda\tau} d\tau$$

$$= \lambda\left[\left. \tau\frac{e^{-\lambda\tau}}{-\lambda}\right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda\tau}}{-\lambda} d\tau\right] = \left.\frac{e^{-\lambda\tau}}{-\lambda}\right|_0^\infty = \frac{1}{\lambda} = L(t)$$

- Lause. Eksponenttijakauma on ainoa muistiton jatkuva jakauma
- Tod.

Muistittomuus tarkoittaa sitä, että $t, h > 0$ pätee

$$S(t+h) = S(t)S(h)$$

Tällöin kokonaisluvuille m, n pätee

$$S\left(\frac{m}{n}\right) = S\left(\frac{m-1}{n}\right)S\left(\frac{1}{n}\right) = S\left(\frac{m-2}{n}\right)S\left(\frac{1}{n}\right)S\left(\frac{1}{n}\right)$$

Tod. (jatkoa)

Kun $m = n$, niin saadaan

$$S(1) = \left(S\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n} \Rightarrow S\left(\frac{1}{n}\right) = S(1)^{\frac{1}{n}}$$

Sijoitetaan tämä edelliseen

$$S\left(\frac{m}{n}\right) = S(1)^{\frac{m}{n}}$$

Eloonjäämisfunktio jatkuva, joten suhde m/n voidaan korvata t:llä

$$S(t) = [S(1)]^{t}$$

Koska $S(0) = 1$ ja $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$, niin on olemassa $\lambda > 0$ s.e. $\mathrm{S}(1) = e^{-\lambda}$

On siis saatu $\mathrm{S}(t) = e^{-\lambda t}$

m.o.t. (mikä olikin todistettava).

Järjestelmien ylläpidosta

- Periaatteellisia vaihtoehtoja
  - Uusiminen (replacement)
  - Ennaltaehkäisevä huolto (maintenance)
  - Korjaaminen (repair)
- Uusiminen
  - Vioittuneet komponentit korvataan uusilla
  - Myös muita komponentteja voidaan uusia
    - Uusiminen tehdään jonkin politiikan mukaisesti (ks. seuraavat kalvot)
- Ennaltaehkäisevä huolto
  - Huollolla pyritään estämään vikaantumiset
    - Esim. lentokoneen huolto – vikaantumisia ei haluta
  - Huollon yhteydessä vikaantuneet komponentit korjataan tai uusitaan
    - Vrt. auton huolto (jarrupalat jne.)
  - Kysymyksiä
    - Miten usein huollot pitäisi tehdä? missä laajuudessa?
- Korjaaminen
  - Järjestelmä korjataan vain sen vikaantuessa
    - Esim. satelliitit – ennaltaehkäisevä huolto liian kallista
  - Kysymyksiä
    - Ikääntyvissä järjestelmissä usein enemmän vikoja – missä vaiheessa korjaaminen ei enää kannata?

Järjestelmien korjaaminen

- Komponenttien uusiminen
  - Kun komponentti vikaantuu, se vaihdetaan uuteen
    - Esimerkiksi lamppujen vaihto
  - Kysymyksiä
    - Montako komponenttia pitäisi olla varastossa, jotta varastoimisen ja vikaantumishäiriöiden yhteenlasketut kustannukset minimoituvat?
    - Onko vikaantuneet komponentit pakko uusia heti?
    - Minkä politiikan mukaan komponentit pitäisi uusia?
- Uusimispolitiikkoja
  - Vikaantumisperustainen (<u>f</u>ailure replacement):
    - Kukin komponentti uusitaan vain sen vikaantuessa
  - Ikääntymisperustainen (<u>a</u>ge replacement)
    - Kukin komponentti uusitaan, kun se
      - vikaantuu <u>tai</u>
      - sen käyttöikä saavuttaa asetetun uusimisvälin c (kumpi näistä sitten toteutuukin komponentin kohdalla ensiksi)
  - Eräperustainen (<u>b</u>lock replacement)
    - Komponentti uusitaan, kun se
      - vikaantuu <u>tai</u>
      - tullaan uusimisajankohtaan $c, 2c, 3c, \ldots$, jolloin <u>kaikki</u> komponentit uusitaan
    - Voidaan joutua uusimaan sellaisiakin komponentteja, jotka ovat toimivia ja jotka ovat olleet toiminnassa vain vähän aikaa

Uusimispolitiikkojen vertailua

- Huomioita
  - Kun $c \to \infty$, ikääntymis- ja eräperustainen uusiminen lähestyvät vikaantumisperustaista
  - Ikääntymisperustaisessa uusimisessa tarvitaan odotusarvoisesti enemmän komponentteja kuin vikaantumisperustaisessa
    - » Näin siksi, että uusitaan myös komponentteja, jotka saavuttavat uusimisvälinsä toimintakunnossa
  - Eräperustaisessa tarvitaan odotusarvoisesti enemmän komponentteja kuin ikääntymisperustaisessa
    - » Näin siksi, että uusitaan myös komponentteja, jotka ovat toimivia ja jotka eivät ole vielä olleet toiminnassa koko uusimisväliä
  - Pätee siis

$$n_f(t) \le n_a(t) \le n_b(t), t > 0$$

missä $n_f(t), n_a(t), n_b(t)$ ovat hetkeen t mennessä tarvittavien uusien komponenttien lkm:t vikaantumis-, ikääntymis- ja eräperustaisessa uusimisessa

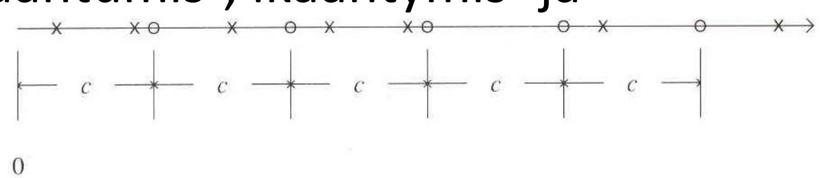


Figure 6.3 Block replacement policy.

Vikaantumisalttius

- Komponenttien vikaantuminen
  - Jos vikataajuusfunktio $h(t)$ on kasvava, niin vikaantumistn kasvaa ajan myötä (wear-out)
    - » Tyypillinen tilanne, kun viat aiheutuvat kulumisesta
  - Jos vikataajuusfunktio $h(t)$ on vähenevä, niin vikaantumistn pienenee ajan myötä (burn-in)
    - » Voi olla tilanne uuden järjestelmän käyttöönotossa, kyse esimerkiksi alkuvaiheen 'lastentaudeista', joiden jälkeen järjestelmä toimii paremmin
  - Molempia tapauksia varten tarvitaan elinikämalleja, joissa vikataajuus ei ole vakio
  - Useimmiten ei-vakioisia vikataajuusfunktioita mallinnetaan Weibull- ja gammajakaumilla
- Käyttötarkoituksia
  - Yksittäisten komponenttien riskianalyysit
  - Pisteprosessit, joissa komponentteja uusitaan
    - » Komponentin vikaantumisajankohtaa kuvaa satunnaismuuttuja T
    - » Korjaamiseen ja uusimiseen kuluva aika voidaan oletetaan merkityksettömäksi, jos kukin komponentti saadaan uudenveroiseksi viiveettä joko uusimalla tai korjaamalla

Weibull-jakauma (1/4)

- Ominaisuuksia
  - Soveltuu sellaisten prosessien mallintamiseen, jossa vikaantumistn muuttuu ajan myötä
  - Elinikää kuvaavat funktiot $(\kappa > 0, \lambda > 0, t \geq 0)$

$$f(t) = \kappa\lambda^{\kappa}t^{\kappa-1}e^{-(\lambda t)^{\kappa}}$$
$$S(t) = e^{-(\lambda t)^{\kappa}}$$
$$h(t) = \kappa\lambda^{\kappa}t^{\kappa-1}$$
$$H(t) = (\lambda t)^{\kappa}$$

  - κ-muotoparametri määrittää jakauman muodon
    - » $\kappa < 1 \Rightarrow$ vikataajuusfunktio vähenevä
    - » $\kappa = 1 \Rightarrow$ vikataajuusfunktio vakio (ts. eksponenttijakauma Weibullin erikoistapaus)
    - » $\kappa > 1 \Rightarrow$ vikataajuusfunktio kasvava
- Pätee

$$E[T^r] = \frac{r}{\kappa\lambda^r}\Gamma\left(\frac{r}{\kappa}\right)$$

  - Ts. odotusarvo- ja muut momentit saadaan gamma-funktiosta, joka on taulukoitu
  - Elinikäodote $L(t)$ ei esitettävissä suljetussa muodossa

Weibull-jakauma (2/4)

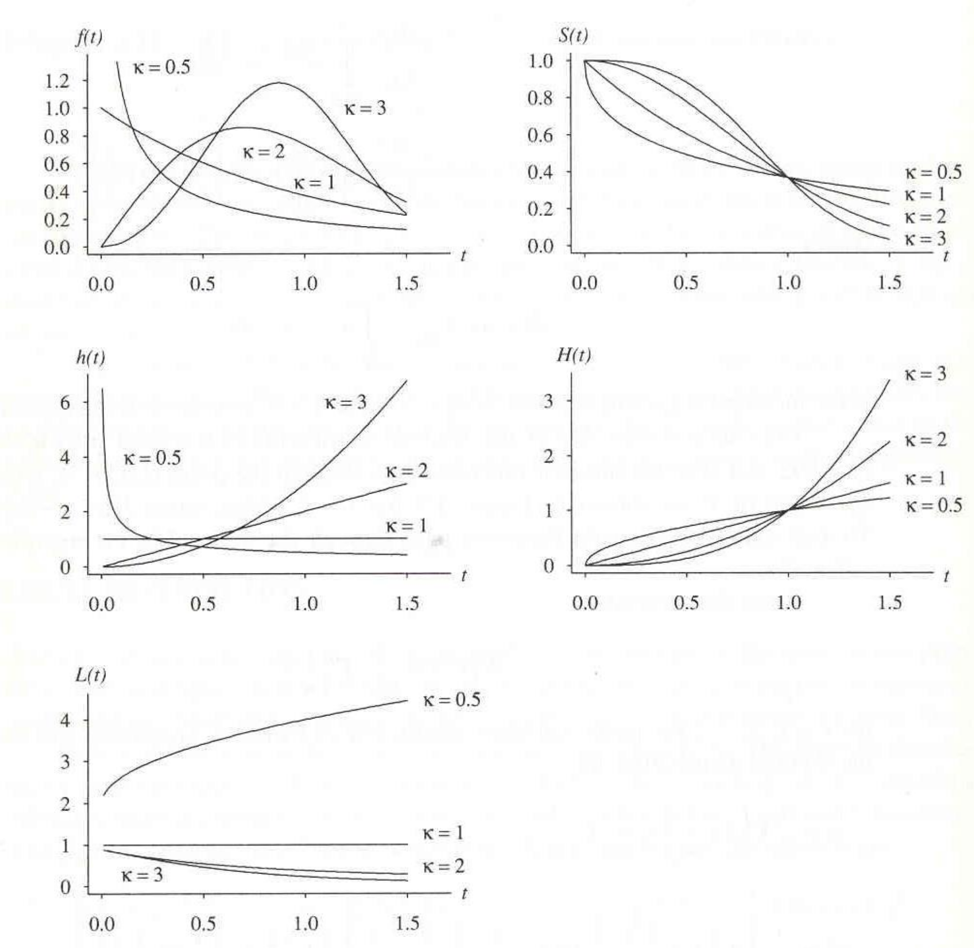


Figure 4.7 Lifetime distribution representations for the Weibull distribution.

Weibull-jakauma (3/4)

- Esim. virtakytkimen toiminta
  - Toiminta-aika noudattaa Weibull-jakaumaa parametrein λ=0.0014 vrk^{-1} ja κ =1.28.
  - Miten kauan kytkin odotusarvoisesti kestää?
  - Millä tn:llä se kestää vähintään 500 vrk:ta?
  - Entä vähintään vielä 500 vrk:ta, jos se on toiminut 200 vrk:ta?

Weibull-jakauma (4/4)

- Ratkaisu
  - Odotusarvo saadaan kaavasta

$$E[T] = \frac{1}{0.0014 \times 1.28} \Gamma\left(\frac{1}{1.28}\right) = 661.8$$

  - Tn sille, että kytkin kestää vähintään 500 vrk:ta saadaan eloonjäämisfunktiosta

$$S(500) = e^{-(0.0014 \times 500)^{1.28}} = 0.531$$

  - Ehdollinen tn sille, että kytkin toimii vähintään t vrk:ta, jos se on jo toiminut 200 vrk:ta

$$S_{T|T\geq 200}(t) = \frac{S(t)}{S(200)} = \frac{e^{-(0.0014\times t)^{1.28}}}{e^{-(0.0014\times 200)^{1.28}}}, t \geq 200$$

mistä saadaan

$$S_{T|T\geq 200}(700) = \frac{S(700)}{S(200)} = 0.459$$

  - Tämä tn pienempi kuin $S(500)$, syynä kasvava vikataajuusfunktio ($\kappa = 1.28 > 1$)

Gammajakauma (1/2)

- Elinikäfunktiot

$$f(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\kappa)}(\lambda t)^{\kappa-1}e^{-\lambda t}$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{\lambda}{\Gamma(\kappa)}(\lambda\tau)^{\kappa-1}e^{-\lambda\tau}d\tau = \frac{1}{\Gamma(\kappa)}\int_0^{\lambda\tau} x^{\kappa-1}e^{-x}dx$$

$$E[T^r] = \frac{\kappa(\kappa+1)(\kappa+1)\ldots(\kappa+r-1)}{\lambda^r}$$

  - $\kappa = 1$ antaa erikoistapauksena eksponenttijakauman
  - Eloonjäämisfunktio ei esitettävissä suljetussa muodossa
    - » Sama koskee myös kumulatiivista riskitaajuusfunktiota $H(t)$ ja jäljellä olevaa elinikä-odotetta $L(t)$
    - » Mm. näistä syistä Weibullin jakauma on käytännössä yleisempi kuin Gamma-jakauma

- Erlangin jakauma
  - Jos $T_1, T_2, \ldots, Tn$ ovat toisistaan riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla λ, niin $\sum_{i=1}^{n} R_i$noudattaa Erlangin jakaumaa (= gammajakauma, missä $\kappa = n$)

$$f(t) = \frac{\lambda}{(n-1)!}(\lambda t)^{n-1}e^{-\lambda t}, S(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

Gammajakauma (2/2)

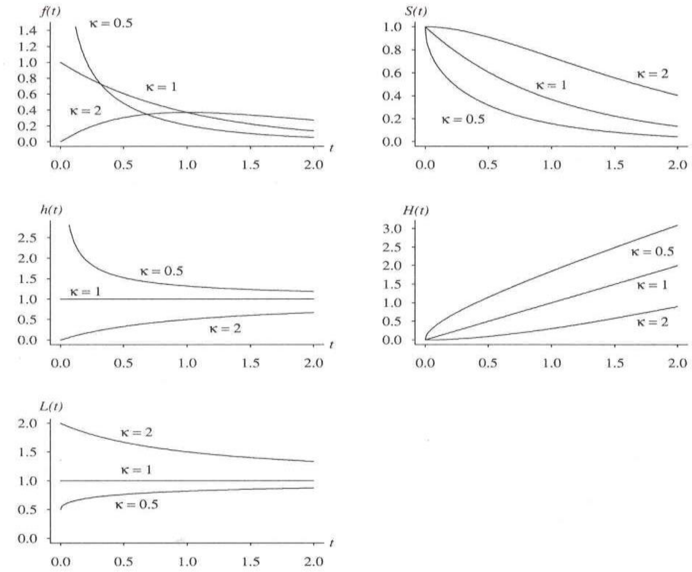


Figure 4.8 Lifetime distribution representations for the gamma distribution.

- Esim. turvallisuuskriittinen varustaminen
  - Luotaimen viestintäjärjestelmän komponentin on toimittava avaruudessa 10 v kuluttua vähintään todennäköisyydellä 99,99%. Montako varakomponenttia on otettava mukaan, jos komponentin vikaantumistaajuus on λ = 0.025/v?
- Ratkaisu
  - Erlangin jakauman perusteella n komponentista muodostuva järjestelmä toimii 10 v päästä tn:llä
  - $S_n(10) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(0.025\times 10)^k}{k!} e^{-0.025\times 10}$
  - Koska $S_3(10) = 99.987\%$ ja $S_4(10) = 99.999\%$ niin oltava ainakin 4 komponenttia eli 3 varalle

Vikaantumisten lukumäärä

- Notaatiota
  - Järjestelmä otetaan käyttöön ajanhetkellä T_0
  - Komponentti vikaantuu hetkellä T_1 ja se joko korjataan tai korvataan uudella viipymättä
  - Tämä korjattu/korvattu komponentti vikaantuu hetkellä T_2, jolloin sille tehdään samoin
  - Näin menetellen hetkeen t mennessä tarvitaan komponentteja

$$N(t) = \max\{k | T_k \leq t\}$$

- Laskentaprosessin ominaisuuksia
  - $N(t)$ on ei-vähenevä
  - Jos $t_1 < t_2$, niin $N(t_2) - N(t_1)$ on aikavälin $(t_1, t_2]$ kuluessa vikaantuneiden komponenttien lukumäärä
  - Prosessilla on riippumattomat lisäykset, jos minkä tahansa kahden toisiaan leikkaamattoman aikavälin $(t_1, t_2]$ ja $(t_3, t_4]$ aikana tapahtuneiden vikaantumisten lukumäärät ovat toisistaan riippumattomia
  - Prosessi on stationaarinen (stationary), jos minkä tahansa aikavälin kuluessa vikaantuneiden komponenttien lukumäärä riippuu vain aikavälin pituudesta
  - Uusiutumisprosessissa (renewal process) vikaantumistapahtumien väliset ajat ovat toisistaan riippumattomia ja identtisesti jakautuneita

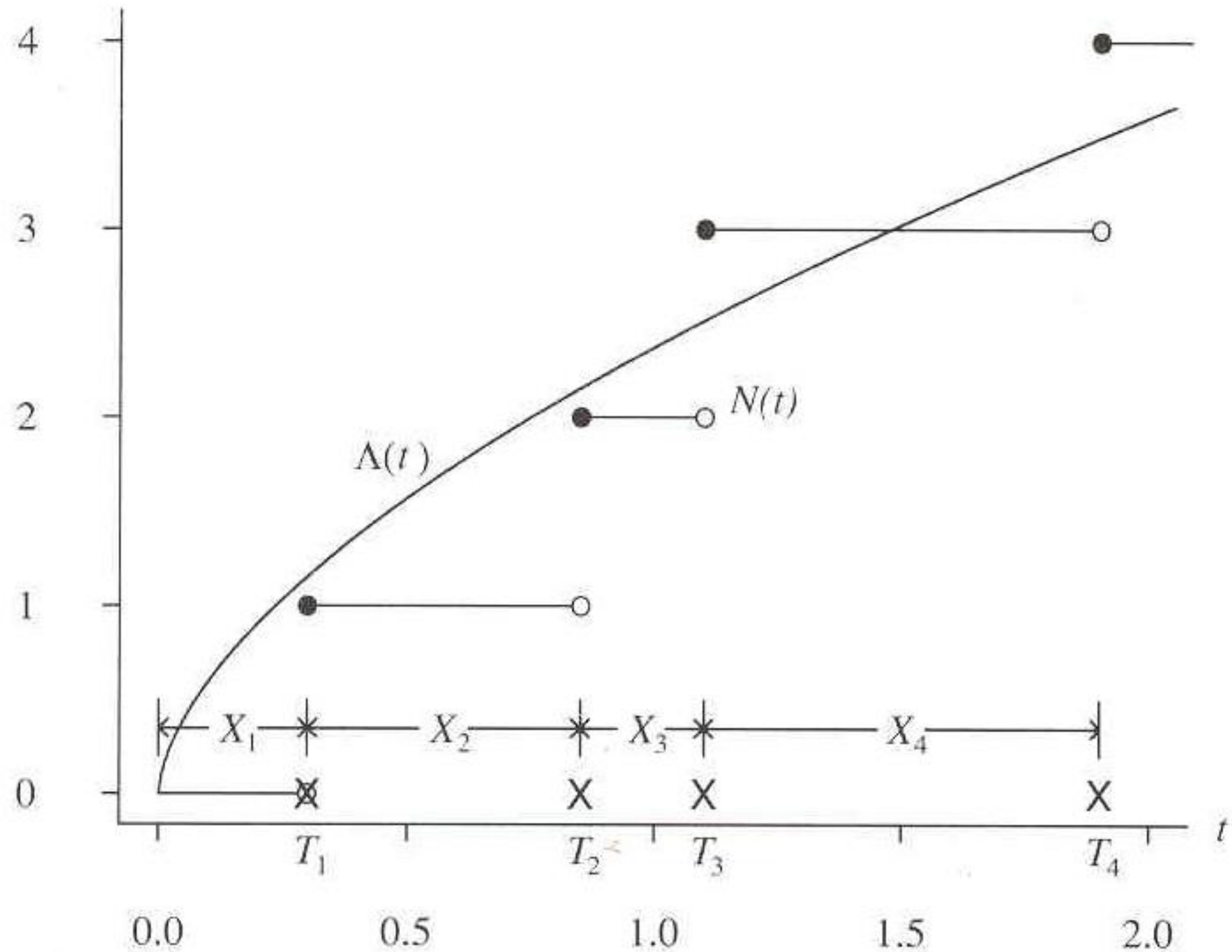


Figure 6.6 Point process realization.

Homogeeninen Poisson-prosessi

- Poisson-prosessi parametrilla λ toteuttaa seuraavat ehdot
  - Alussa hetkellä $t = 0$ vikaantumisten lkm $N(0) = 0$
  - Toisiaan leikkaamattomien aikavälien aikana tapahtuneiden vikaantumisten lukumäärät ovat riippumattomia
  - Minkä tahansa t :n levyisen aikavälin aikana vikaantumisten lkm on Poisson-jakautunut parametrilla λ siten, että

$$P[N(t_2) - N(t_1) = n] = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^n}{n!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$$

missä $n = 0,1,2, \ldots$

- Esim.
  - Tarkastellaan edellistä avaruusluotainta. Mikä on todennäköisyys sille, että 7 vuoden päästä vikaantuneita komponentteja on tasan 2?
- Ratkaisu

$$P[N(t) = n] = \frac{[\lambda t]^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

joten

$$P[N(7) = 2] = \frac{[0.025 \times 7]^2}{2!} e^{-0.025 \times 7} = 1.23\%$$

Ei-homogeeninen Poisson-prosessi

- Ominaisuuksia
  - Vikaantumiset eivät tapahdu vakiotaajuudella, vaan niitä tapahtuu aikariippuvan funktion $\lambda(t)$ mukaisesti; tätä kutsutaan intensiteettifunktioksi
  - Kunnoltaan huononeva (paraneva) järjestelmä mallinnetaan kasvavalla (vähenevällä) $\lambda(t)$:llä
  - Hetkeen t mennessä ilmenneiden vikatapahtumien odotusarvoinen lkm saadaan kumulatiivisesta intensiteettifunktiosta

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau$$

  - Tasan n komponenttia vikaantuu aikavälillä $(a, b]$ todennäköisyydellä

$$P[N(b) - N(a) = n] = \frac{\left[\int_a^b \lambda(\tau) d\tau\right]^n}{n!} e^{-\int_a^b \lambda(\tau) d\tau}$$

- Huomioita
  - Ensimmäisen komponentin vikaantumiseen kuluva odotusarvoinen aika sama kuin yksittäisen komponentin vikataajuusfunktiolla $\lambda(t)$
  - Sen sijaan myöhemmät vikaantumiset riippuvat intensiteettifunktiosta ⇨ komponenttien myöhemmät vikaantumisvälit riippuvat siitä, milloin aiemmat vikaantumiset ovat tapahtuneet
  - ⇨ Ei siis enää kyse uusiutumisprosessista!

Ei-homogeeninen Poisson-prosessi

- Esimerkki virtakytkin
- Olkoon intensiteettifunktio

$$\lambda(t) = \kappa\lambda^{\kappa} t^{\kappa-1}, t > 0$$

parametrein $\lambda = 0.0014$ ja $\kappa = 1.28$ (so. sama kuin Weibull-jakauman vikataajuusfunktio kalvolla 29).
Millä todennäköisyydellä tämän intensiteetin mukaisesti huonontuvassa järjestelmässä komponentti vikaantuu kolme kertaa 1000 vrk:n kuluessa

- Ratkaisu
  - Nyt

$$\Lambda(t) = \int_0^t \kappa\lambda^{\kappa}\tau^{\kappa-1} d\tau = (\lambda t)^{\kappa}$$

  - Täten

$$P[N(1000) = 3] = \frac{\left[\int_0^{1000} \lambda(\tau) d\tau\right]^3}{3!} e^{-\int_0^{1000} \lambda(\tau)d\tau}$$

$$= \frac{[0.0014 \times 1000]^{1.28\times 3}}{3!} e^{-\left[(0.0014\times 1000)^{1.28}\right]} = 13.0\%$$

Korjaukset ja käytettävyys

- Järjestelmien korjaamisesta
  - Testaamiseen, korjaamiseen ja uusimiseen menee usein aikaa, mitä pisteprosessikuvaus ei ota huomioon
  - Merkitään X_i:llä i:nteen vikaantumiseen ja R_i:llä i:nteen korjaamiseen kuluvaa aikaa
  - Järjestelmän tila riippuu nyt siitä, miten kauan vikaantumiseen ja korjaamiseen kuluu aikaa
  - Merkitään järjestelmän tilaa muuttujalla

$$X(t) = \begin{cases} 1, \text{jos järjestelmä toimii hetkellä } t \\ 0, \text{jos komponentti ei toimi hetkellä } t \end{cases}$$

- Käytettävyys (availability, $A(t)$)
  - Tarkoittaa todennäköisyyttä, jolla järjestelmä on toimintakuntoinen jonakin ajankohtana tai aikavälinä
  - Lähestyy ajan kuluessa vakioraja-arvoa, kun X_i:n ja R_i:n jakaumat pysyvät samoina
  - Voidaan käsitteenä täsmentää eri tavoin

Käytettävyys

- Hetkittäinen käytettävyys
  - Engl. point availability

$$A(t) = P[X(t) = 1] = E[X(t)], t > 0$$

  - Sama kuin eloonjäämisfunktio $S(t)$ komponentille, jota ei voida korjata
- Raja-arvoinen käytettävyys
  - Engl. limiting availability

$$A = \lim_{t \to \infty} A(t)$$

  - Miten ison osan ajasta järjestelmä toimii ”pitkässä juoksussa”?
- Keskimääräinen käytettävyys välillä $(0, c]$
  - Engl. average availability

$$A_c = \frac{1}{c} \int_0^c A(t) dt \, , c > 0$$

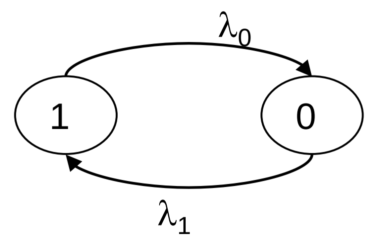
  - Miten ison osan aikavälistä (0,c] järjestelmä toimii odotusarvoisesti ?
- Raja-arvoinen keskim. käytettävyys
  - Engl. limiting average availability

$$A_\infty = \lim_{c \to \infty} A_c$$

  - Miten suuren osan ajasta ylipäätään järjestelmä toimii?

Käytettävyyden määrittäminen

- Lähtökohtia
  - Oletetaan, että X_i ja R_i $(i = 1,2,\ldots)$ ovat toisistaan riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrein λ_0 ja λ_1



  - Aikavälin $(t, t+\Delta]$ päättyessä järjestelmä toimii, jos
    - » se toimi hetkellä t eikä hajonnut ennen $t+\Delta$:tä, tai
    - » se ei toiminut hetkellä t, mutta korjattiin ennen $t+\Delta$:tä
  - Saadaan siis

$$A(t+\Delta) = (1-\lambda_0)A(t) + \lambda_1\Delta\big(1-A(t)\big)$$

$$\Rightarrow \frac{A(t+\Delta)-A(t)}{\Delta} = -(\lambda_0+\lambda_1)A(t) + \lambda_1$$

  - Kun $\Delta \to 0$, niin

$$A(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1} + \frac{\lambda_0}{\lambda_0+\lambda_1}e^{-(\lambda_0+\lambda_1)t}, t > 0$$

Käytettävyys ja vikaantumisajat

- Keskimääräinen käytettävyys

$$A_c = \frac{1}{c}\int_0^c \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1} + \frac{\lambda_0}{\lambda_0+\lambda_1} e^{-(\lambda_0+\lambda_1)t}\right) dt$$
$$= \frac{1}{c}\left[\frac{c\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1} - \frac{\lambda_0}{(\lambda_0+\lambda_1)^2} e^{-(\lambda_0+\lambda_1)c} + \frac{\lambda_0}{(\lambda_0+\lambda_1)^2}\right]$$

  - Vain ensimmäinen termi jää jäljelle, kun $c \to \infty$

- Raja-arvoja
  - Raja-arvoinen käytettävyys siis

$$A = \lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1}$$

  - Koska keskimääräinen vikaantumisaika $\mathrm{MTTF} = 1/\lambda_0$ (mean time to failure) ja korjausaika $\mathrm{MTTR} = 1/\lambda_1$ (mean time to repair), niin kertomalla yllä osoittaja että nimittäjä termillä $1/(\lambda_0\,\lambda_1)$ saadaan

$$A = \frac{\mathrm{MTTF}}{\mathrm{MTTF+MTTR}}$$

  - Raja-arvoinen käytettävyys riippuu siitä, miten nopeasti järjestelmä saadaan korjattua suhteessa siihen, miten nopeasti se vikaantuu
  - Tämä pätee myös, kun korjausaika toisin jakautunut (esim. korjaus kestoltaan vakiopituinen)

Esimerkkejä käytettävyydestä (1/2)

- Esim. uusiutumisprosessi
  - Oletetaan järjestelmän vikaantuminen ja korjaaminen eksponenttijakautuneiksi. Keskimääräinen vikaantumisaika on 1000 tuntia ja korjausaika 10 tuntia. Järjestelmä on aluksi toimintakunnossa.
  - Mikä on järjestelmän
    - » toimintatodennäköisyys hetkellä $t = 10$?
    - » raja-arvoinen käytettävyys?
    - » keskimääräinen käytettävyys välillä $(0,10]$?
- Ratkaisu
  - Nyt $\lambda_0 = 1/\mathrm{MTTF} = 0.001$ ja $\lambda_1 = 1/\mathrm{MTTR} = 0.1$, joten

$$A(10) = \frac{0.1}{0.1 + 0.001} + \frac{0.1}{0.1 + 0.001} e^{-(0.001+0.1)\times 10} = 99.37\%$$

  - Raja-arvoinen käytettävyys saadaan, kun hetkittäisessä käytettävyydessä $t \to \infty$

$$A = \frac{0.1}{0.1 + 0.001} = 99.01\%$$

  - Keskimääräinen käytettävyys

$$A(t) = \frac{1}{10}\left[\frac{0.1 \times 10}{0.101} + \frac{0.001}{(0.101)^2}\left(1 - e^{-0.101\times 10}\right)\right] = 99.63\%$$

Esimerkkejä käytettävyydestä (2/2)

- Esim. laatuohjelman suunnittelu
  - Laatuohjelman avulla pyritetään kaksinkertaistamaan keskimääräinen vikaantumisaika sekä puolittamaan keskimääräinen korjausaika. Jos nämä tavoitteet saavutetaan, mikä on laatuohjelman vaikutus järjestelmän käytettävyyteen?
- Ratkaisu
  - Ennen laatuohjelmaa järjestelmä on poissa käytöstä ajan

$$1 - A_1 = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1 + \lambda_0}$$

  - Laatuohjelman jälkeen vastaava osuus ajasta on

$$1 - A_2 = 1 - \frac{2\lambda_1}{2\lambda_1 + 1/2\lambda_0} = \frac{1/2\lambda_0}{2\lambda_1 + 1/2\lambda_0}$$

  - Suhteeksi saadaan siis

$$\frac{1 - A_2}{1 - A_1} = \frac{1/2\lambda_0}{2\lambda_1 + 1/2\lambda_0} \times \frac{\lambda_1 + \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda_1 + \lambda_0}{4\lambda_1 + \lambda_0}$$

  - Usein λ_0 olennaisesti pienempi kuin λ_1, joten aika, jona järjestelmä ei ole käytettävissä, alenee noin neljäsosaansa