1. *Neste, jonka viskositeetti on η, virtaa tasaisesti (virtausnopeus ei muutu ajan funktiona) poikkileikkaukseltaan ympäränmuotoisessa, vaakasuorassa putkessa, jonka säde on R, pituus L ja paine-ero putken päiden välillä Δp. Merkitään etäisyyttä putken keskiakselilta r:llä. Osoita, että nesteen virtausnopeus on*

$$v_y(r) = \frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right)\frac{\Delta p}{L}.$$

Ohje: viskoosin, kokoonpuristumattoman, pelkästään y-suuntaan virtaavan nesteen virtausyhtälö on

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 v_y + \frac{f}{\rho}.$$

Putken sylinterisymmetrian vuoksi kannattaa käyttää sylinterikoordinaatistoa, jolloin virtausnopeus on ainoastaan r:n funktio. Tällöin

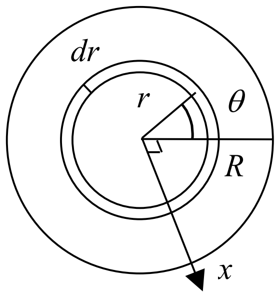
$$\nabla^2 v_y = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_y}{\partial r}\right).$$

Virtausyhtälö $\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 v_y + \frac{f}{\rho}$. Sylinterikoordinaateissa $\nabla^2 F(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)$, kun funktio F on ainoastaan r:n funktio. Tasapainotilanteessa $\frac{\partial v_y}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\eta}{\rho}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_y}{dr}\right) + \frac{f}{\rho} = 0 \quad \Rightarrow$ $d\left(r\frac{dv_y}{dr}\right) = -\frac{f}{\eta}r\,dr$. Integroidaan (määräämätön integraali) $\Rightarrow \quad r\frac{dv_y}{dr} = -\frac{f}{2\eta}r^2 + C_1 \quad \Rightarrow$ $dv_y = \left[-\frac{f}{2\eta}r + \frac{C_1}{r}\right]dr$. Integroidaan taas $\Rightarrow \quad v_y = -\frac{f}{4\eta}r^2 + C_1\ln r + C_2$. Reunaehdot: 1° $v_y(0)$ äärellinen ja 2° $v_y(R) = 0$. 1° $\Rightarrow \quad C_1 = 0$ (muuten $v_y(0) \to -\infty$). 2° $\Rightarrow$ $v_y(R) = -\frac{f}{4\eta}R^2 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{fR^2}{4\eta}$, joten ratkaisu on $v_y = \frac{f}{4\eta}\left(R^2 - r^2\right)$. Kun putken päiden välillä on paine-ero Δp, kohdistuu neste-elementtiin tilavuusyksikköä kohden voima $f = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{L}$, joten $v_y = \frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right)\frac{\Delta p}{L}$.

2. *Käyttäen virtausnopeuden lauseketta*

$$v_y(r) = \frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right)\frac{\Delta p}{L}$$

laske kokonaisvirtaus putken poikkipinta-alan läpi. Tulos on ns. Poiseuillen yhtälö.



Renkaan (säde dr) läpi kulkee tilavuusvirta $d\dot{V} = v_y \cdot dA = \frac{1}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right)\frac{\Delta p}{L}\cdot 2\pi r\,dr \;=$

$\frac{\pi}{2\eta}\frac{\Delta p}{L}\left(r^3 - rR^2\right)dr$. Kokonaisvirtaus saadaan integroimalla tilavuusvirran lauseke yli koko putken

$$\dot{V} = \frac{\pi}{2\eta}\frac{\Delta p}{L}\int_0^R \left(r^3 - rR^2\right)dr \;=$$

$$= \frac{\pi}{2\eta}\frac{\Delta p}{L}\Bigg|_0^R\left(\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{2}R^2r^2\right) = \frac{\pi}{2\eta}\frac{\Delta p}{L}\left(\frac{1}{4}R^4 - \frac{1}{2}R^4\right) \quad\Rightarrow\quad \dot{V} = \frac{dV}{dt} = \left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\frac{R^4}{\eta}\right)\frac{p_1 - p_2}{L}\;.$$

3. *Sylinterinmuotoinen höyryputki on vuorattu eristekerroksella. Eristeputken sisäpinnalla (säde R_1) lämpötila on vakio T_1 ja ulkopinnalla (säde R_2) T_2. a) Mikä on eristeputken lämpötilajakauma r:n funktiona tasapainotilanteessa? b) Kuinka suuri on lämpövirta eristekerroksen läpi? Vihje: käytä tehtävässä 1 annettua Laplacen operaattorin sylinterikoordinaattiesitystä.*

Lämmönjohtumisyhtälö $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c}\nabla^2 T$. Tasapainotilanteessa $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ja sylinterikoordinaatistossa (kun $T = T(r)$) $\nabla^2 T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \;\Rightarrow\; \frac{\kappa}{\rho c}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$.

Yhtälön vasen puoli on identtisesti nolla vain, jos sulkujen sisällä on vakiolauseke eli

$r\frac{\partial T}{\partial r} = \text{vakio} \;\Rightarrow\; dT = \frac{C}{r}dr \;\Rightarrow\; \int_{T_1}^{T} dT = \int_{R_1}^{r}\frac{C}{r}dr \;\Rightarrow\; T = T_1 + C\ln\frac{r}{R_1}$. Reunaehdosta

$$r = R_2 \;\Rightarrow\; T = T_1 + C\ln\frac{R_2}{R_1} = T_2 \;\Rightarrow\; C = \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(R_2/R_1\right)} \;\Rightarrow\; T = T_1 + \left(T_2 - T_1\right)\frac{\ln\left(r/R_1\right)}{\ln\left(R_2/R_1\right)}\;.$$

b) $H = A\,j_E = -A\kappa\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{2\pi r L\kappa\left(T_2 - T_1\right)}{\ln\left(R_2/R_1\right)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\ln r - \ln R_1\right] = \frac{2\pi L\kappa\left(T_1 - T_2\right)}{\ln\left(R_2/R_1\right)}$.

4. *Puolijohteita voidaan seostaa päällystämällä ensin puolijohteen pinta seostusatomeilla ja sen jälkeen pitämällä puolijohdetta korkeassa lämpötilassa, jolloin seostusatomit diffusoituvat puolijohteen sisään. Tällaisessa ns. rajoitetun lähteen diffuusiossa seostusatomikonsentraatio syvyyden x ja ajan t funktiona on*

$$n(x,t) = \frac{Q}{\sqrt{\pi D t}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}},$$

missä Q on vakio (verrannollinen lähdeatomien määrään). Osoita, että tämä funktio on diffuusioyhtälön $\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ *ratkaisu.*

Diffuusioyhtälö: $\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$. Ratkaisuyrite: $n(x,t) = \frac{Q}{\sqrt{\pi D t}} e^{-x^2/4Dt}$. Lasketaan osittaisderivaatta ajan suhteen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Q}{\sqrt{\pi D}} t^{-1/2} e^{-x^2/4Dt}\right) = \frac{Q}{\sqrt{\pi D}}\left(-\frac{1}{2}t^{-3/2}\right)e^{-x^2/4Dt} +$$

$$+\frac{Q}{\sqrt{\pi D}} t^{-1/2} e^{-x^2/4Dt}\left(-\frac{-x^2}{4Dt^2}\right) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi D t}\, t} e^{-x^2/4Dt}\left(\frac{x^2}{2Dt} - 1\right)$$

ja paikan suhteen $\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{\sqrt{\pi D t}} e^{-x^2/4Dt}\right) = \frac{Q}{\sqrt{\pi D t}} e^{-x^2/4Dt}\left(-\frac{x}{2Dt}\right) \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Q}{\sqrt{\pi D t}}\left(-\frac{x}{2Dt}\right)e^{-x^2/4Dt}\right] = \frac{Q}{\sqrt{\pi D t}}\left(-\frac{x}{2Dt}\right)e^{-x^2/4Dt}\left(-\frac{x}{2Dt}\right) +$$

$$\frac{Q}{\sqrt{\pi D t}}\left(-\frac{1}{2Dt}\right)e^{-x^2/4Dt} = \frac{Q}{2\sqrt{\pi D t}\, t} e^{-x^2/4Dt}\left(\frac{x^2}{2D^2 t} - \frac{1}{D}\right),$$ joten

$D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{Q}{2\sqrt{\pi D t}\, t} e^{-x^2/4Dt}\left(\frac{x^2}{2Dt} - 1\right) = \frac{\partial n}{\partial t}$ eli ratkaisuyrite toteuttaa diffuusioyhtälön.