3 Käyräviivaiset koordinaatistot

Seuraavassa käsitellään ensin yleisesti käyräviivaisiin koordinaatistoihin liittyviä asioita ja sen jälkeen erikseen pallo- ja sylinterikoordinaatistoja.

3.1 Napakoordinaatisto

Tason napakoordinaatisto oletetaan ennestään tutuksi ja varsinaisena aiheena ovat kolmiulotteisen avaruuden koordinaatistot. Pieni kertaus ei kuitenkaan ole pahitteeksi.

Määritelmä 3.1 Tason napakoordinaatit (r, θ) määritellään muunnoskaavoilla

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

kun $r \geq 0$ ja $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Tällöin $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja kulma θ määräytyy yhtälöistä $\cos\theta = x/r$, $\sin\theta = y/r$. Tapauksessa $x > 0$ saadaan $\theta = \arctan(y/x)$. Origossa $(0, 0)$ on $r = 0$, mutta kulmaa θ ei ole määritelty. Joissakin tilanteissa kulman θ määrittelyväliksi on helpompaa valita $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Napakoordinaatiston yksikkövektorit ovat

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{r}\mathbf{r} = \frac{1}{r}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$$

ja

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}.$$

Tällöin origon ulkopuolella $\|\mathbf{e}_r\| = \|\mathbf{e}_\theta\| = 1$, $\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\theta$ ja $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ on positiivisesti suunnattu kanta.

Esimerkki 3.2 Jos $u\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, niin sen esitys napakoordinaateissa on uusi funktio

$$U(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Osoita, että

$$\nabla u = \frac{\partial U}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta$$

ja

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}.$$

Ratkaisu: Luennolla/harjoituksissa. Monissa sovelluksissa kirjoitetaan $U = u$, vaikka se on tarkasti ottaen väärin. Myös yllä on lyhennetty merkintöjä, sillä $\nabla u = \nabla u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ja $\Delta u = \Delta u(r\cos\theta, r\sin\theta)$: ensin lasketaan gradientti tai Δ, ja sen jälkeen tulokseen sijoitetaan $x = r\cos\theta$ jne.

Esimerkki 3.3 Johda napakoordinaatiston pinta-alan suurennussuhde

$$dA = dx\,dy = r\,dr\,d\theta.$$

Ratkaisu: Pieni koordinaattiruutu $r_0 \le r \le r_0+\Delta r$, $\theta_0 \le \theta \le \theta_0+\Delta\theta$ kuvautuu xy-tason sektorin (keskuskulma $\Delta\theta$) ja kahden ympyrän (säteet r_0 ja $r_0+\Delta r$) väliin jäävän alueen leikkaukselle, jonka pinta-ala on

$$\Delta A = \frac{\Delta\theta}{2\pi}(\pi(r_0+\Delta r)^2 - \pi r_0^2) = r_0\Delta r\Delta\theta + \frac{1}{2}(\Delta r)^2\Delta\theta.$$

Pinta-alan paikallinen suurennussuhde on siis

$$\frac{\Delta A}{\Delta r\Delta\theta} = r_0 + \frac{\Delta r}{2} \to r_0,$$

kun $\Delta r \to 0$ ja $\Delta\theta \to 0$.

3.2 Käyräviivainen koordinaatisto

Kolmiulotteisen avaruuden käyräviivainen koordinaatisto alueessa D (joka on yleensä koko $\mathbf{R}^3$) syntyy muuttujanvaihdosta $\mathbf{r}\colon \Omega \to D$, kun $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Tällöin siis

$$\mathbf{r}(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \in D \text{ kaikilla } (u,v,w) \in \Omega.$$

Muuttujanvaihtoon liittyvät **koordinaattipinnat** saadaan kiinnittämällä yksi koordinaatti ja antamalla kahden muun vaihdella muodossa $(u,v) \mapsto \mathbf{r}(u,v,w_0)$, $(u,w) \mapsto \mathbf{r}(u,v_0,w)$ ja $(v,w) \mapsto \mathbf{r}(u_0,v,w)$. Kun kaksi koordinaattia kiinnitetään, niin saadaan **koordinaattikäyriä** $u \mapsto \mathbf{r}(u,v_0,w_0)$, $v \mapsto \mathbf{r}(u_0,v,w_0)$ ja $w \mapsto \mathbf{r}(u_0,v_0,w)$. Nämä ovat myös koordinaattipintojen leikkauskäyriä.

Määritelmä 3.4 Tarkastellaan derivoituvaa muuttujanvaihtoa $\mathbf{r}\colon \Omega \to D$.

- Koordinaattien (u,v,w) **venytyssuhteet** (scale factor) ovat

  $$h_u = \left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right\|,\ h_v = \left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right\| \text{ ja } h_w = \left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}\right\|.$$

  Tässä pisteen $\mathbf{r} = (x,y,z)$ osittaisderivaatat lasketaan koordinaateittain eli esimerkiksi

  $$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{r}_u = x_u\,\mathbf{i} + y_u\,\mathbf{j} + z_u\,\mathbf{k}.$$

- Uuteen koordinaatistoon liittyvät yksikkövektorit ovat

  $$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u}\mathbf{r}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u},\ \mathbf{e}_v = \frac{1}{h_v}\mathbf{r}_v \text{ ja } \mathbf{e}_w = \frac{1}{h_w}\mathbf{r}_w,$$

  jos venytyssuhteet ovat $\neq 0$.

- Koordinaatisto (u, v, w) on **suorakulmainen (eli ortogonaalinen) käyräviivainen** koordinaatisto, jos $\mathbf{e}_u \perp \mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_u \perp \mathbf{e}_w$ ja $\mathbf{e}_v \perp \mathbf{e}_w$.
- Suorakulmainen koordinaatisto (u, v, w) on **oikeakätinen**, jos $\mathbf{e}_w = \mathbf{e}_u \times \mathbf{e}_v$.

Kaikki tärkeimmät avaruuden koordinaatistot ovat ortogonaalisia ja oikeakätisiä.

Pienessä muutoksessa u-koordinaatin suuntaan välillä $[u, u + \Delta u]$ on

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(u + \Delta u, v, w) - \mathbf{r}(u, v, w) \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\,\Delta u,$$

joten $\|\Delta\mathbf{r}\| \approx h_u \Delta u$. Näin saadaan koordinaattikäyrien kaarenpituusdifferentiaalit venytyssuhteiden avulla lausuttuina:

$$ds_u = h_u\,du,\ ds_v = h_v\,dv \text{ ja } ds_w = h_w\,dw.$$

Lisäksi **ortogonaalisessa tapauksessa** saadaan koordinaattitasojen pinta-aladifferentiaalit

$$dS_u = h_v h_w\,dv\,dw, dS_v = h_u h_w\,du\,dw \text{ ja } dS_w = h_u h_v\,du\,dv$$

sekä tilavuusalkio

$$dV = h_u h_v h_w\,du\,dv\,dw.$$

Ortogonaalisessa tapauksessa yleisen parametrisoidun käyrän kaarenpituusdifferentiaali on

$$ds^2 = h_u^2\,du^2 + h_v^2\,dv^2 + h_w^2\,dw^2,$$

ts.

$$\ell = \int_a^b \sqrt{h_u^2 u'(t)^2 + h_v^2 v'(t)^2 + h_w^2 w'(t)^2}\,dt.$$

3.3 Pallokoordinaatisto

Pallokoordinaatistoon kuuluu radiaalinen etäisyysmuuttuja ja kaksi kulmaa, jotka vastaavat (pienillä eroilla) maapallon pituus- ja leveysasteita. Valitettavasti kulmien valinta ja kaikki merkinnät ovat vielä standardisoimatta, ja esimerkiksi matematiikassa ja fysiikassa käytetään erilaisia valintoja[1].

Määritelmä 3.5 Pisteen $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ **pallokoordinaatit** ovat (r, φ, θ), jossa

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0$$

on pisteen etäisyys origosta, kulma $\varphi \in [0, \pi]$ on pisteen paikkavektorin $\mathbf{r}$ ja vektorin $\mathbf{k}$ välinen kulma sekä $\theta \in [0, 2\pi]$ pisteen tasoprojektion (x, y) kulma napakoordinaateissa.

[1] Ensimmäinen sekaannuskohta on kulmien järjestys: Leveysaste (pystysuora kulma) voidaan maapallolla määrittää tähtitieteellisin keinoin, mutta pituusasteen (vaakasuora kulma) määrittäminen oli vaikeaa ennen tarkkojen kellojen keksimistä. Tämän vuoksi kartoissa kirjoitetaan ensimmäiseksi pystysuora kulma/koordinaatti, **vaikka kaikki oppivat jo koulussa, että vaakasuora x-koordinaatti tulee ensin.** Tämä ikävä piirre on historiallisista syistä periytynyt myös pallokoordinaatistoon.

Kulmaa θ ei ole määritelty z-akselin pisteille, jotka saadaan tapauksissa $\varphi = 0$ ja $\varphi = \pi$. Lisäksi kulmaa φ ei ole määritelty origossa $(0,0,0)$. Näistä ei tule kuitenkaan suurta häiriötä alla oleviin muunnoskaavoihin, koska ensimmäisessä tapauksessa $\sin\varphi = 0$ ja toisessa $r = 0$ tuottavat kyseessä olevasta koordinaatista pelkän nollan.

Koska $\cos\varphi = z/r$, niin $z = r\cos\varphi$. Tällöin

$$\sin\varphi = \cos(\pi/2 - \varphi) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r},$$

joten $\sqrt{x^2+y^2} = r\sin\varphi$. Lisäksi napakoordinaatiston kaavoista saadaan

$$x = \sqrt{x^2+y^2}\cos\theta \text{ ja } y = \sqrt{x^2+y^2}\sin\theta,$$

joten muunnoskaavat ovat

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

ja $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Esimerkki 3.6 Pisteelle $(x,y,z) = (1,1,-1)$ on $r = \sqrt{3}$ ja $\cos\varphi = z/r = -1/\sqrt{3}$, joten

$$\varphi = \arccos(-1/\sqrt{3}) = \frac{3\pi}{4}.$$

Lisäksi $\tan\theta = y/x = 1$, joten $\theta = \pi/4$ (koska selvästi $0 < \theta < \pi/2$). Helpoissa tapauksissa (kuten tässä) kulmat voi myös päätellä kuviosta.

Esimerkki 3.7 Maapallolla vaakasuora kulma $\theta - 180° \in [-180°, 180°]$ on **pituusaste** eli longitudi ja pystysuora kulma $90° - \varphi \in [-90°, 90°]$ **leveysaste** eli latitudi. Kulman φ englanninkielinen nimi on 'colatitude'. Maan pinnan (tai kartan) ympyrät, joille $\varphi =$ vakio, ovat **leveyspiirejä** eli latitudeja, ja ympyrät "$\theta =$ vakio" ovat **pituuspiirejä** eli meridiaaneja.

Pallokoordinaatistoon liittyvät venytyssuhteet ovat

$$h_r = 1,\ h_\varphi = r \text{ ja } h_\theta = r\sin\varphi,$$

joten yksikkövektoreiksi saadaan

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{j} + \cos\varphi\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_\varphi = \cos\varphi\cos\theta\,\mathbf{i} + \cos\varphi\sin\theta\,\mathbf{j} - \sin\varphi\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}. \end{cases}$$

Nämä voi päätellä myös suoraan geometrisesti ilman venytyssuhteiden laskemista. Esimerkkinä lasketaan kuitenkin

$$\mathbf{r}_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{j} + r\cos\varphi\,\mathbf{k}) = -r\sin\varphi\sin\theta\,\mathbf{i} + r\sin\varphi\cos\theta\,\mathbf{j},$$

josta saadaan

$$h_\theta = \sqrt{r^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + r^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta} = r \sin\varphi.$$

Lyhyt tarkistus osoittaa, että kyseessä on suorakulmainen oikeakätinen koordinaatisto. Pinta-alan ja tilavuuden suurennussuhteisiin palataan myöhemmin pinta- ja avaruusintegraalien yhteydessä, mutta todetaan jo tässä, että R-säteisen pallon pinnalla pinta-aladifferentiaali on muotoa

$$dS = R^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

ja pallokoordinaatiston tilavuusalkio on

$$dV = r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta.$$

Esimerkki 3.8 Otetaan Helsingistä suunta itään: Missä kohdassa saavutaan päiväntasaajalle?

Ratkaisu luennolla/Kangaslampi ss. 18–19.

3.4 Sylinterikoordinaatisto

Myös sylinterikoordinaattien merkinnöissä esiintyy vaihtelua, ja erityisesti tämän monisteen ja meneillään olevan kurssin aksiaalinen muuttuja on $r_\perp$ (toinen hyvä merkintä voisi olla r_z) eikä r, ρ, ϱ tai R kuten muissa materiaaleissa tai monissa kirjoissa.

Määritelmä 3.9 Pisteen $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ **sylinterikoordinaatit** ovat $(r_\perp, \theta, z)$, jossa

$$r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$$

on pisteen kohtisuora etäisyys z-akselista, $\theta \in [0, 2\pi]$ on pisteen tasoprojektion (x, y) napakoordinaatiston kulma ja $z = z$.

Käytännössä sylinterikoordinaatisto saadaan tason napakoordinaatistosta lisäämällä siihen z-koordinaatti, joten muunnoskaavoiksi voidaan kirjoittaa suoraan

$$\begin{cases} x = r_\perp \cos\theta \\ y = r_\perp \sin\theta \\ z = z, \end{cases}$$

ja $r_\perp \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $z \in \mathbf{R}$.

Sylinterikoordinaattien venytyssuhteet ovat

$$h_{r_\perp} = 1, \; h_\theta = r_\perp \text{ ja } h_z = 1,$$

ja yksikkövektorit

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{r_\perp} = \cos\theta \, \mathbf{i} + \sin\theta \, \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \, \mathbf{i} + \cos\theta \, \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{k}. \end{cases}$$

Myös sylinterikoordinaatisto on suorakulmainen ja oikeakätinen. Sen tilavuusalkioksi saadaan $dV = r_\perp \, dr_\perp \, d\theta \, dz$.

11 Nabla-operaattorit käytäviivaisissa koordinaatistoissa

Monet skalaari- ja vektorikentät on helpompi määritellä jotenkin muuten kuin xyz-koordinaattien avulla.

Esimerkki 11.1 Origossa sijaisevan pistemäisen varatun hiukkasen (varaus Q) sähkökentän voimakkuus on muotoa

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\mathbf{e}_r$$

pallokoordinaattien avulla lausuttuna. Maxwellin yhtälöitä tutkittaessa täytyy laskea sähkökenttien lähteisyyksiä ja pyörteisyyksiä. Täytyykö yllä oleva vektorikenttä esittää ensin muuttujien x, y, z avulla ennen kuin nämä voidaan laskea, vai voidaanko lähteisyys ja pyörteisyys laskea suoraan yllä annetusta kaavasta?

Vastaus kysymykseen on: Gradientti, divergenssi ja roottori voidaan laskea ilman muunnosta xyz-koordinaatistoon kaikissa suorakulmaisissa käyräviivaisissa koordinaatistoissa.

11.1 Gradientti

Tarkastellaan skalaarikenttää $f = f(x, y, z)$ ja ortogonaalista koordinaatistomuunnosta

$$\mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

Muunnoksen avulla funktiosta f saadaan uusi funktio[2]

$$\tilde{f}(u, v, w) = f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)).$$

Millainen esitys gradientilla ∇f on funktion $\tilde{f}$ osittaisderivaattojen avulla lausuttuna uudessa xyz-koordinaatistossa?

Lause 11.2 *Yllä olevassa tilanteessa*

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\,\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\,\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial w}\,\mathbf{e}_w.$$

Kuten alaviitteessä mainitaan, tämä kaava kirjoitetaan yleensä muodossa

$$\nabla f = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f}{\partial u}\,\mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial f}{\partial v}\,\mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial f}{\partial w}\,\mathbf{e}_w.$$

Lauseen todistus: Ketjusäännön mukaan

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} = \nabla f \cdot \mathbf{r}_u,$$

[2] Tarkasti ottaen $\tilde{f}$ on eri funktio kuin alkuperäinen f, joten selvyyden vuoksi käytetään ainakin aluksi erottavaa merkintää, jota yleensä ei mainita ollenkaan.

jossa kaikkien lausekkeiden muuttujana on $\mathbf{r}(u, v, w)$. Koska $\mathbf{r}_u = h_u \mathbf{e}_u$, niin

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} = (\nabla f \cdot \mathbf{e}_u) h_u \Leftrightarrow \nabla f \cdot \mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}.$$

Tämä todistaa gradientin ∇f esityksessä yksikkövektorin $\mathbf{e}_u$ kertoimen, koska koordinaatisto on ortogonaalinen. Muut kertoimet saadaan samalla tavalla vaihtamalla muuttujan u tilalle v tai w. $\square$

11.2 Divergenssi

Katso Kangaslampi 4.8.

11.3 Roottori

Katso Kangaslampi 4.8.