## 3.3 Kvasi-Newton -menetelmät

Käytännössä derivaatan $f'(x_k)$ laskeminen voi olla vaikeaa tai kohtuuttoman kallista.

Newtonin iteraatiota muokataan approksimoimalla derivaattaa erotusosamäärällä:

<u>Algoritmi 3.3.1</u> Sekanttimenetelmä

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Tarvitaan siis kaksi alkuarvausta iteraation käynnistämiseksi.

Suppenemisnopeus on $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.62$.

---

<u>Newton:</u> $f'(x_*) = 0$

$$x_{k+1} - x_* = \frac{f''(\xi_k)}{\underbrace{2f'(x_k)}_{\to \text{ lähestyy nollaa, kun } x_k \to x_*}} (x_k - x_*)^2$$

Taylor: $f'(x_k) = \underbrace{f'(x_*)}_{=0 \text{ (oletus)}} + (x_k - x_*) f''(\eta_k)$

$$= (x_k - x_*) f''(\eta_k)$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} - x_* = \frac{f''(\xi_k)}{2f'(\eta_k)} (x_k - x_*) \quad \text{lineaarinen!}$$

<u>Esimerkki:</u> $f(x) \equiv x^2 = 0 \qquad f'(x) = 2x$

Newton: $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k} = \frac{1}{2} x_k$

$f(x) \equiv x^j = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = \frac{j-1}{j} x_k$

Kiintopisteiteraatioista : $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

Tehtävällä $f(x) = 0$ on monia kiintopiste-esityksiä :

$$\varphi(x) \equiv x + f(x) = x$$
$$\varphi(x) \equiv x - f(x) = x$$

Toisaalta : $x = \varphi(x)$ :lle

$$f(x) \equiv x - \varphi(x) = 0$$
$$f(x) \equiv \exp(x - \varphi(x)) - 1 = 0$$

Kaikille : $f(x) = 0$, jos ja vain jos $\varphi(x) = x$.

Esimerkki : Newton : $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Huomaa! $\varphi(x) = x$, jos $f(x) = 0$
(olettaen $f'(x) \neq 0$)

Riittävä ehto suppenemiselle :

Lause Merkitään kiintopistettä $x_*$. Oletetaan, että $\varphi \in C^1$ ja $|\varphi'(x)| < 1$ välillä $[x_* - \delta, x_* + \delta]$. Jos alkuarvaus $x_0$ on tällä välillä, niin kiintopisteiteraatio suppenee.

Todistus Taylor : 
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \varphi(x_k) \\ &= \varphi(x_*) + (x_k - x_*)\varphi'(\xi_k) \\ &= x_* + (x_k - x_*)\varphi'(\xi_k), \end{aligned}$$

$\xi_k \in [x_k, x_*]$.

Vähennetään $x_*$ puolittain ja merkitään $e_k = x_k - x_*$.

Saadaan : $e_{k+1} = e_k \varphi'(\xi_k) \Rightarrow |e_{k+1}| \leq |\varphi'(\xi_k)||e_k|$

$\square$

Vahvempi tulos: Kiintopisteiteraatio suppenee, jos $\varphi$ on kontraktio, eli on olemassa vakio $L<1$ s.e. kaikille $x, y$ pätee
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le L|x-y|.$$

<u>Lause</u> Olkoon $\varphi$ kontraktio koko reaaliakselilla. Tällöin kiintopiste $x_*$ on yksikäsitteinen ja kiintopisteiteraatio suppenee mv. alkuarvauksella $x_0$.

<u>Todistus</u> Näytetään, että jono $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ on Cauchyn jono.

Olkoon $k > j$: $|x_k - x_j| \le |x_k - x_{k-1}| + |x_{k-1} - x_{k-2}| + \dots + |x_{j+1} - x_j|$

$$|x_m - x_{m-1}| = |\varphi(x_{m-1}) - \varphi(x_{m-2})| \le L|x_{m-1} - x_{m-2}| \le L^{m-1}|x_1 - x_0|$$

$$\Rightarrow |x_k - x_j| \le L^j \frac{1 - L^{k-j}}{1-L}|x_1 - x_0|$$

Jos $k > N$, $j > N$, niin $|x_k - x_j| \le L^N \frac{1}{1-L}|x_1 - x_0| \xrightarrow{N \to \infty} 0$ (Cauchy!)

Kiintopisteen olemassaolo seuraa kontraktion jatkuvuudesta. Sen yksikäsitteisyys taasen osoitetaan vastaoletuksella:

$$\underbrace{|x_* - y_*|}_{\text{Kahden kiintopisteen erotus}} = |\varphi(x_*) - \varphi(y_*)| \le L|x_* - y_*|$$

RR, $L < 1$ ellei $x_* = y_*$.

□