Lisämateriaali : GAUSSIN PISTEET JA PAINOT

Jo edellä on saatu ortogonaalipolynomeille : $p_0(x), p_1(x), \ldots$ palautuskaava : Olettaen normalisoinnin $(p_k, p_k) = 1$:

$$x p_{k-1} = \beta_{k-1} p_{k-2} + \alpha_k p_{k-1} + \beta_k p_k \,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

missä

$$\alpha_k = \langle x p_{k-1}, p_{k-1} \rangle \,,$$

$$\beta_k = \langle x p_{k-1}, p_k \rangle \,,$$

ja $\beta_0 = 0$, $p_{-1}(x) = 0$ ja $p_0(x) = \pm\sqrt{1/\mu_0}$.

($\mu_k = \int_a^b x^k w(x)\,dx$ eli momentti ; Tässä siis $\mu_0 = b - a$, kun $w(x) \equiv 1$.)

Lause Polynomin $p_n(x)$ juuret ovat tridiagonaalimatriisin

$$T_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & 0 \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ominaisarvot.

Olkoon $T_n = Q \Lambda Q^T$.

Määritellään $P = \begin{pmatrix} p_0(x_1) & \cdots & p_0(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1}(x_1) & \cdots & p_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}$

ja $W = \frac{1}{p_0} \operatorname{diag}(q_{11}, \ldots, q_{1n})$,

tällöin $Q = PW$.

Kvadratuurin painot $w = \frac{1}{p_0} W Q^T e_1$,

missä e_1 on luonnollinen kantavektori.

Todistus T_n on symmetrinen ja reaalinen $\Rightarrow$ ominaisarvot $x_1 < \dots < x_n$ ovat erisuuria $x_i \in \mathbb{R}$

Ominaisvektorille q:

$$T_n q = \lambda q$$

eli $\alpha_1 q_1 + \beta_1 q_2 = \lambda q_1$

$$\beta_{k-1} q_{k-1} + \alpha_k q_k + \beta_k q_{k+1} = \lambda q_k \quad , \quad k = 2, \dots, n-1,$$

$$\beta_{n-1} q_{n-1} + \alpha_n q_n = \lambda q_n$$

Ratkaistaan q:

$$q_2 = \frac{\lambda - \alpha_1}{\beta_1} q_1 \quad ; \quad \text{normeeraus } \|q\|_2 = 1$$

$$q_{k+1} = \frac{\lambda - \alpha_k}{\beta_k} q_k - \frac{\beta_{k-1}}{\beta_k} q_{k-1} \quad , \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Mutta, polynomeille $p_0, p_1, \dots$ pätee sama rekursio!

$$p_1(\lambda) = \frac{\lambda - \alpha_1}{\beta_1} p_0(\lambda)$$

$$p_k(\lambda) = \frac{\lambda - \alpha_k}{\beta_k} p_{k-1}(\lambda) - \frac{\beta_{k-1}}{\beta_k} p_{k-2}(\lambda) \quad , \quad k = 2, \dots, n.$$

Eli vektorimuodossa

$$q = \frac{q_1}{p_0} p(\lambda) \quad , \quad \text{kun } p(x) = \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Rekursio avattuna (alkuperäinen ortogonaalipolynomeille):

$$x \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_n p_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \beta_n \neq 0$, joten $p_n(\lambda) = 0$.

Painot saadaan ehdosta: $\int_a^b p_k(x) w(x)\, dx = \frac{1}{p_0} \delta_{k0}$, $k = 0, \dots, n$, eli

$$\sum_{i=1}^{n} w_i p_k(x_i) = \frac{1}{p_0} \delta_{k0}.$$

$\square$

Käytännössä : Ratkaistaan p_k :

$$q_k = \beta_k p_k = (x - \alpha_k) p_{k-1} - \beta_{k-1} p_{k-2} ,$$

missä normalisointiehto implikoi $\beta_k = \pm \sqrt{\langle q_k , q_k \rangle}$

ja siis $p_k = q_k / \beta_k$ ja seuraava α_{k+1} kuten edellä.

Legendre : $x \in [-1, 1]$

Laskemalla kaavat läpi saadaan $\begin{cases} \alpha_k = 0 , \\ \beta_k = \sqrt{\dfrac{k^2}{4k^2 - 1}} . \end{cases}$