

1 LIUKULUVUISTA

Määritelmä 1.1 k -kantainen ja n -pitäinen liukuluku on muotoa $x = \pm (.d_1d_2\dots d_n)_k \cdot k^e$ oleva luku, missä $m \leq e \leq M$ on sen eksponentti, ja $(.d_1d_2\dots d_n)$ on sen mantissa. Liukuluku on normalisoitu, jos $d_1 \neq 0$.

Kirjassa merkitään $d_1.d_2d_3\dots d_n$.

IEEE : $k=2$, 64 bittiä, 1 merkille, 11 eksponentille, ja 52 mantissalle.
"double precision"

Kaikissa liukulukujärjestelmissä on nolasta seuraava luku eli ns. kone-epsilon, ϵ . IEEE-järjestelmä sisältää subnormaalit luvut, jotka kattavat (tavalla tai toisella) välin $[0, \epsilon]$.

IEEE : Kaksoistarkkuus

Eksponentti	Luku	Tyyppi
0 ... 0	$\pm (0.b_1b_2\dots b_{52})_2 \times 2^{-1022}$	0 tai subnormaali
0 ... 01 = 1_{10} 0 ... 010 = 2_{10}	$\pm (1.b_1b_2\dots b_{52})_2 \times 2^{-1022}$	Normalisoitu
01 ... 1 = 1023_{10}	$\times 2^0$	Huom! Eksponentti = "oikea" + 1023
11 ... 10 = 2046_{10}	$\times 2^{1023}$	
11 ... 1	$\pm \infty$, jos $b_i = 0$ NaN, muuten	Poikkeus

Poikkeukset: $\pm \infty$, NaN

Ylivuoto } varsinainen arvo riippuu
Alivuoto } valitusta pyöristyksestä

Pyöristykset : Round

- down : $\hat{x} = \text{round}(x)$; $\hat{x} \leq x$
- up : " ; $\hat{x} \geq x$
- towards 0 : jompi kumpi ; $\hat{x} \in [0, x]$
- nearest : " ; lähin, tasapelissä se, jolla on oikeanpuoleisin 0

Oletus: Pyöristys lähimpään.

Pätee: $\text{round}(x) = x(1 + \delta)$, missä $|\delta| < \varepsilon$

(tai $|\delta| < \varepsilon/2$, kun oletusarvostategia on käytössä)

Standardi antaa:

$$a \oplus b = \text{round}(a + b) = (a + b)(1 + \delta_1)$$

$$a \ominus b = \text{round}(a - b) = (a - b)(1 + \delta_2)$$

$$a \otimes b = \text{round}(ab) = (ab)(1 + \delta_3)$$

$$a \oslash b = \text{round}(a/b) = (a/b)(1 + \delta_4)$$

Oikeiden pyöristysten kirjainpito on ei-triviaalia.

2 HÄIRIÖALTTIUS ; ALGORITMIEN STABIILISUUS

Määritelmä 2.1 Häiriöalttiuus kertoo ratkaisun herkkyydestä syötteen pieniin muutoksiin.
(Tehtävän, ei algoritmin, ominaisuus)

Oletus: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, \hat{x} ja x lähellä toisiaan, esim. $\hat{x} = \text{round}(x)$.

Kysymys: Kuinka lähellä ovat $y = f(x)$ ja $\hat{y} = f(\hat{x})$?

Määritelmä 2.2 Absoluuttinen häiriöalttiuus: $C(x)$

$$|\hat{y} - y| \approx C(x) |x - \hat{x}|$$

Määritelmä 2.3 Suhteellinen häiriöalttiuus: $K(x)$

$$\left| \frac{\hat{y} - y}{y} \right| \approx K(x) \left| \frac{x - \hat{x}}{x} \right|$$

Kysymä on siis funktion f ominaisuus pisteessä x .

Ensimmäinen malli:
$$\hat{y} - y = f(\hat{x}) - f(x) = \underbrace{\frac{f(\hat{x}) - f(x)}{\hat{x} - x}}_{\approx f'(x), \text{ kun } \hat{x} \rightarrow x} (\hat{x} - x)$$

$$\Rightarrow C(x) = |f'(x)|$$

Vastaus:
$$\frac{\hat{y} - y}{y} = \underbrace{\frac{f(\hat{x}) - f(x)}{\hat{x} - x}}_{\approx f'(x)} \cdot \frac{\hat{x} - x}{x} = \frac{x}{f(x)}$$

$$\Rightarrow K(x) = \left| \frac{x f'(x)}{f(x)} \right|$$

Luentotehtävä: Tarkastele funktioita $f(x) = 2x$, $f(x) = \sqrt{x}$.

$$f(x) = 2x, f'(x) = 2 \Rightarrow C(x) = 2, K(x) = 1$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}, f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, K(x) = \frac{1}{2}$$

STABIILISUUS

$fl(x+y) \equiv \text{round}(x) \oplus \text{round}(y) = (x(1+\delta_1) + y(1+\delta_2))(1+\delta_3)$,
missä $|\delta_i| < \epsilon$, $i = 1, 2, 3$, ja $fl(\cdot)$ tarkoittaa liukuluvontausta.

Forward error analysis: Paljonko vastaus eroaa tarkasta?

Backward error analysis: Minkä tehtävän tarkka vastaus on saatu?

FEA: $fl(x+y) = x + y + x(\delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_3) + y(\delta_2 + \delta_3 + \delta_2\delta_3)$

Absoluuttinen virhe:

$$|fl(x+y) - (x+y)| \leq (|x| + |y|)(2\epsilon + \epsilon^2)$$

Suhteellinen virhe:

$$\left| \frac{fl(x+y) - (x+y)}{x+y} \right| \leq \frac{(|x| + |y|)(2\epsilon + \epsilon^2)}{|x+y|}$$

Mielenkiintoinen tilanne: $y \approx -x$

BEA: $fl(x+y) = \underbrace{x(1+\delta_1)(1+\delta_3)}_{\substack{\text{suhteellinen virhe} \\ \leq 2\epsilon + \epsilon^2}} + \underbrace{y(1+\delta_2)(1+\delta_3)}_{\text{ditto}}$

Kahden luvun summa on siis tarkemmin stabili.

Suus: Tehtävä voi olla hyvänlaatuinen, mutta algoritmi voi olla epästabili.

Myös:

Hyvänlaatuinen tehtävä voi joskus tulla approksimoitukeni häiriöalttulla.

Numerinen derivaanti: Erotusosamäärä

$$\text{Taylor: } f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi), \quad \xi \in [x, x+h]$$

Derivaatalle approksimaatio:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \underbrace{\frac{h}{2} f''(\xi)}_{\text{katkaisuvirhe: } \Theta(h)}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ on 1. kertaluvun approksimaatio;}$$

katkaisuvirhe $\Theta(h^1)$.
(diskretisointivirhe)

Oletus: $f(x), f(x+h)$ tarkkoja: $|\delta_i| < \epsilon, i=1,2$

$$\frac{f(x+h)(1+\delta_1) - f(x)(1+\delta_2)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \underbrace{\frac{\delta_1 f(x+h) - \delta_2 f(x)}{h}}_{\text{pyöristysvirhe}}$$

$$|\text{pyöristysvirhe}| \leq \frac{2\epsilon |f(x)|}{h} \quad (\text{pienille } h)$$

Havaitaan:

$$\left. \begin{array}{l} \text{katkaisuvirhe} \sim h \\ \text{pyöristysvirhe} \sim 1/h \end{array} \right\} \text{tasapainotetaan}$$

Esimerkki: $f(x) = \sin x, x = \pi/4$; $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x$

$$\left. \begin{array}{l} \text{katkaisuvirhe} \sim \frac{\sqrt{2}h}{4} \\ \text{pyöristysvirhe} \sim \frac{\sqrt{2}\epsilon}{h} \end{array} \right\} \Rightarrow h = 2\sqrt{\epsilon} \text{ tarkimmalle}$$

Huomaa, absoluuttinen häiriöalttius $C(x) = |-\sin x|$,
suhteellinen " $K(x) = |-x \sin x / \cos x|$,

$$\text{kun } x = \frac{\pi}{4}, \text{ saadaan } C\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$K\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Vasta erotusosamäärä tekee tehtävästä häiriöalttiin.

3 YHTÄLÖN RATKAISUSTA

3.1 Bisektio

Välimerkkilause jatkuville funktioille sanoo, että $f(x) = 0$ on olemassa, jos $x_1 < x < x_2$ s.e. $f(x_1) < 0$ ja $f(x_2) > 0$ on eri merkit.

Puolitusalgoritmi perustuu tarkasteluvälin puolittamiseen s.e. merkkiehto säilyy.

Huomaa, että käytännössä ongelma on löytää $[x_1, x_2]$.

Suppenemisnopeus: Kuinka nopeasti ratkaisu löytyy eli kuinka nopeasti virhe menee kohti nollaa?

Analyysi: Ollaan väli $[a, b]$. k :n askelen jälkeen tarkasteluväli on $|b-a|/2^k$ ($\rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$). Keskitetään ratkaisu eli tarkastellaan väliä 2δ :

$$\frac{|b-a|}{2^k} \leq 2\delta \Leftrightarrow 2^{k+1} \geq \frac{|b-a|}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow k \geq \log_2 \left(\frac{|b-a|}{\delta} \right) - 1$$

Jokainen askel pienentää virhettä vakiotekijällä $\frac{1}{2}$. Algoritmi on siis lineaarinen.

3.3 Kvasi-Newton -menetelmät

Käytännössä derivaatan $f'(x_k)$ laskeminen voi olla vaikeaa tai kohtuuttoman kallista.

Newtonin iteraatiota mukautetaan approksimoimalla derivaattaa erotusosamäärällä:

Algoritmi 3.3.1 Sekanttimenetelmä

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Tarvitaan siis kaksi alkuarvausta iteraation käynnistämiseksi.

Suppenemisnopeus on $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$.

3.2 Newtonin iteraatio

Algoritmi 3.2.1

Olkoon alkuarvo x_0 . Iteraatio

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

on Newtonin menetelmä.

Taylorin polynomi - kytkentä :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x]$$

Olkoon x_* nollakohta : $f(x_*) = 0$.

Sivunnetaan katkaisuvirhe ja merkitään $x_1 = x_*$:

$$0 = f(x_0) + (x_1 - x_0)f'(x_0)$$

Lause 3.2.2 Jos $C^2 \ni f$ ja alkuarvo x_0 on riittävän

hyvä ja lisäksi $f'(x_*) \neq 0$, niin Newtonin iteraatio suppenee nollakohtaan x_* asympotoottisesti kvadraattisella nopeudella.

Tod. (Kvadraattisuus)

Taylor : pistessä x_k :
$$x_* = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{(x_* - x_k)^2}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}$$

Lasketaan erotus $x_{k+1} - x_* = \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)} (x_k - x_*)^2$

Oletuksella : $\left| \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)} \right| \leq C$ väite seuraa.

Γ Kirjassa : $C_* = \left| \frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)} \right|$ s.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|^2} = C_*$

4 INTERPOLAATIO

(POLYNOMI-INTERPOLAATIO)

4.1 Lagrangen interpolaatio

Idea: Approksimoidaan funktiota $f(x)$ välillä $x \in [a, b]$ polynomilla $p(x)$ s.e. datapisteinä (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, approksimaatio on tarkka: $y_i = p(x_i)$.

Esimerkki 4.1.1 $(1, 2), (2, 3), (3, 6)$ $((x_i, y_i), i = 0, 1, 2)$

Mahdollinen väli: $[1, 3]$; $p_2(x) = \sum_{j=0}^2 c_j x^j$

2. asteen polynomi \Leftrightarrow kolme tuntematonta kerrointa

\Rightarrow kolme pistettä määrittää 2. asteen polynomin tarkasti

Matrüsimuodossa (Vandermonde) :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{eli} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_0 = 3, c_1 = -2, c_2 = 1 ; p_2(x) = x^2 - 2x + 3$$

Menetelmä on valitettavasti erittäin häiritsevä.

Yhtälöryhmän ratkaisun kompleksisuus : $\Theta(n^3)$

Idea: Korvataan kanta x^j "paremmalla."

Paras mahdollinen tilanne :

$$p(x) = \sum y_i \varphi_i(x), \quad \text{kun} \begin{cases} \varphi_i(x_i) = 1, \\ \varphi_i(x_j) = 0, \quad i \neq j. \end{cases}$$

Osoittautuu, että $\varphi_i(x)$:t on helppo konstruoida.

Määritelmä 4.1.2 Lagrangen kantapolynomi

$$\varphi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} ; p(x) = \sum y_i \varphi_i(x) \text{ on}$$

ns. Lagrangen muoto.

Esimerkki 4.1.3

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} \\ \varphi_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} \\ \varphi_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \end{cases} ; \quad p(x) = 2 \cdot \varphi_0(x) + 3 \cdot \varphi_1(x) + 6 \cdot \varphi_2(x) \\ = x^2 - 2x + 3$$

Laskennallinen vaativuus (kompleksisuus) : $\Theta(n^2)$

Sivuskel : Polynomin evaluointi kannana x^d on lineaarinen : $\Theta(n)$

Horner : $y = c_n$; $y = yx + c_{n-1}$; ...

$$n \text{ askelta} \Rightarrow y = \sum_{j=0}^n c_j x^j$$

Toinen sivuskel : Lause 4.1.4 Interpoleatiopolynomi $p_n(x)$ on yksikäsitteinen.

Todistuksen idea : $p_n(x) - q_n(x)$ on n nollakohtaa.

Olkoot $p_n(x)$ ja $q_n(x)$ kaksi interpoleatiopolynomia.

$$(p_n(x_i) - q_n(x_i)) = 0, \quad \underbrace{i = 0, 1, \dots, n}_{n+1 \text{ nollakohtaa}}$$

$$\text{Erotus : } p_n(x) - q_n(x) = 0$$

Takaisin asiaan :

Lagrangen muoto voidaan kirjoittaa tehokkaampaan, ns. barysentriseen muotoon, missä evaluointi saadaan nopeaksi.

Määritellään uudet kantapolynomit : $\hat{\varphi}_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) / (x - x_i)$

Merkitään $\varphi(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$, jolloin

$$p(x) = \varphi(x) \sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i} y_i, \quad w_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Saatu, ns. 1. barysentrisen muoto, vaatii painojen w_i muodostamiseen $\Theta(n^2)$, mutta valurinttiin vain $\Theta(n)$.

Havaitaan, että jos $y_i = 1$, niin $p_n(x) = 1$.

Pätevyys: $1 = \varphi(x) \sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x-x_i}$, kaikilla x .

Määritelmä 4.1.5 Barysentrisen interpolatiokaava

$$p(x) = \left(\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x-x_i} y_i \right) / \left(\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x-x_i} \right)$$

Esimerkki 4.1.6

$$y_0 = 2, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = 6$$

$$w_0 = \frac{1}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}, \quad w_1 = \frac{1}{(2-1)(2-3)} = -1,$$

$$w_2 = \frac{1}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}$$

$$p(x) = \left(\frac{2}{2(x-1)} - \frac{3}{x-2} + \frac{6}{2(x-3)} \right) / \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2(x-3)} \right)$$

Saadaanko sama tulos?

$$p(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right) / \left(\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right)$$

$$= x^2 - 2x + 3$$

Huraa!

4.2 Newtonin interpolaatio

Luonnollisen kannan laajennus on joukko $1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \dots,$

Määritelmä 4.2.1

$$\prod_{j=0}^{n-1} (x-x_j)$$

Newtonin interpolaatiopolynomi :

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n \prod_{j=0}^{n-1} (x-x_j),$$

missä a_i on valittu s.e. interpolaatioehto toteutuu kaikissa x_i .

Konstruktio vastaa alakolmiiosysteemin ratkaisua : $\Theta(n^2)$

$$p(x_0) = a_0 = y_0$$

$$p(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0}$$

Sis :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & x_1 - x_0 & & & & \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 1 & x_n - x_0 & \dots & \dots & \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Kaksi havaintoa :

- pisteiden järjestyksellä ei ole väliä (eri stabiilisuus eri permutaatioilla)
- uuden pisteen lisääminen ei vaikuta jo lasketuihin kertoimiin

Edellä nähdyssä barysentrisessä interpolaatiossa painot w_i voi myös päivittää inkrementaalisesti.

Esimerkki 4.2.2 $p(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2)$

$$\text{Systemi : } \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

$$p(x) = x^2 - 2x + 3$$

Potentiaalinen ongelma : Suurissa systeemeissä yli- ja alivuoto

Jaetut erotukset : Parempi algoritmi kertoimille a_i

Notaatio: $y_i = f(x_i) = f_i$; interpolatiopolynomi $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

Havaitaan, että a_k on sama kuin Newtonin interpolatiopolynomissa.

Määritelmä 4.2.3 Kaetan erotus kertalukua k

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = a_k$$

Lause 4.2.4 Patee:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Rekursio päättyy, koska $f[x_i] = y_i = f_i$.

Esimerkki 4.2.5

$$f[x_0] = 2$$

$$f[x_1] = 3$$

$$f[x_2] = 6$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{3 - 2}{2 - 1} = 1$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{6 - 3}{3 - 2} = 3$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{3 - 1}{3 - 1} = 1$$

On saatu täsmälleen samat kertoimet a_k !

4.3 Interpolaatiovirhe : $R(x) = f(x) - p(x)$

Oletetaan, että f on $(n+1)$ kertaa derivoituva.

Olkoon x' jokin pisteistä x_i eroava piste.

Muodostetaan apufunktio : $h(x) = f(x) - p(x) - c w(x)$,

$$\text{missä } w(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j) \text{ ja } c = \frac{f(x') - p(x')}{w(x')}$$

Funktion $h(x)$ nollakohdat ovat pisteet $\underbrace{x_0, \dots, x_n}_{n+1}$ ja x' .

Niitä on siis ainakin $n+2$ kpl.

Rollen lauseella toistamalla päädytään siihen, että derivaatalla $h^{(n+1)}$ on ainakin yksi nollakohta; merkitään ξ :

$$h^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - p^{(n+1)}(x) - c w^{(n+1)}(x) \\ = f^{(n+1)}(x) - c(n+1)!$$

$$\Rightarrow h^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)! = 0 \quad \Rightarrow c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\text{Pisteessä } x' : R(x') = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x' - x_j)$$

$$\underline{\text{Lause 4.3.1}} \quad R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j), \text{ missä } \xi = \xi(x).$$

Huomaa, että $h(x)$:n määrittelyn nojalla vakio c on korkeimman x :n potenssin kerroin. Tämä on edellisen nojalla eräs jaettu erotus:

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

4.4 Palittainen polynomiapproksimaatio

Idea: jaetaan väli $[a, b]$ osaväleihin pituudeltaan

$$h = \frac{b-a}{n}, \text{ missä } n \text{ on välien lkm.}$$

Jokaisen osaväli approksimoidaan erikseen alhaisen asteen polynomilla.

Lineaarinen palittainen interpolatiopolynomi (interpolantti):

$$l(x) = f(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Interpolatiovirhe: $f(x) - l(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_{i-1})(x - x_i)$

olet: $|f''(x)| \leq M$: $|f(x) - l(x)| \leq M \frac{h^2}{8}$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$

Jos derivaatta on rajoitettu yli koko välin $[a, b]$ virhe on sama.

Hermiten interpolatio: Vaaditaan derivaatta jatkuwaksi.

Olkoon $p(x)$ kolmannen asteen polynomi. Sen derivaatta $p'(x)$ on kvadraattinen:

$$p'(x) = f'(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f'(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \alpha (x - x_{i-1})(x - x_i)$$

Param: $p'(x_i) = f'(x_i)$. α on parametri, joka on sovitettava

dataan: Integroidaan (integraalien yläraja: x_i)

$$p(x) = -\frac{f'(x_{i-1})}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - x_i) dt + \frac{f'(x_i)}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - x_{i-1}) dt$$

$$+ \alpha \int_{x_{i-1}}^{x_i} (t - x_{i-1})(t - x_i) dt + C$$

Välittömästi: $p(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) \Rightarrow C = f(x_{i-1})$

Vastavasti: $p(x_i) = f(x_i) \Rightarrow \alpha = \frac{3}{h^2} (f'(x_{i-1}) + f'(x_i))$

$$+ \frac{6}{h^3} (f(x_{i-1}) - f(x_i))$$

Splinit : Jos luovumme vakiarvoisesta derivaatan sovituksista, voimme konstruoida kolmannen asteen palapolynomin, jolla on kaksi jatkuvaa derivaattaa pisteissä x_i : $S(x)$.

Ongelma : Kertoimien valinta edellyttää globaalin ongelman ratkaisua. Jokaiselle välille saadaan oma splini : $s_i(x)$.

Konstruktio : Oletetaan aluksi, että $z_i = S''(x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$, tunnetaan. Lisäksi $h = x_i - x_{i-1}$ (= vakio).

Väli : $[x_{i-1}, x_i]$: Pätee : $s_i''(x) = \frac{1}{h} z_{i-1} (x_i - x) + \frac{1}{h} z_i (x - x_{i-1})$

Integroidaan kahdesti :

$$s_i(x) = \frac{1}{h} z_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6} + \frac{1}{h} z_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6} + C_i (x - x_{i-1}) + D_i$$

Interpolatioehto kiinnittää vakiot C_i, D_i :

$$D_i = f_{i-1} - \frac{h^2}{6} z_{i-1}$$

$$C_i = \frac{1}{h} \left[f_i - f_{i-1} + \frac{h^2}{6} (z_{i-1} - z_i) \right]$$

On siis saatu kaava splinin evaluointiin yli jokaisen osavälin.

Mutta, z_i on ratkaistava ja reunaehdot (z_0 ja z_n) asetettava.

Lasketaan $s(x)$:n derivaatta ja käytetään jatkuvuutta :

$$s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i) :$$

$$\frac{h}{2} z_i + \frac{1}{h} (f_i - f_{i-1}) + \frac{h^2}{6} (z_{i-1} - z_i) =$$

$$- \frac{h}{2} z_i + \frac{1}{h} (f_{i+1} - f_i) + \frac{h^2}{6} (z_i - z_{i+1}),$$

$$i = 1, \dots, n-1,$$

mikä on tridiagonaalijärjestelmä :

$$\frac{2h}{3} z_i + \frac{h}{6} z_{i-1} + \frac{h}{6} z_{i+1} = -\frac{2}{h} f_i + \frac{1}{h} f_{i-1} + \frac{1}{h} f_{i+1}$$

$$= \frac{1}{h} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$

$$= b_i$$

z_0 ja z_n vietään oikealle puolelle, jolloin

$$b_1 = \frac{1}{h} (f_2 - 2f_1 + f_0) - \frac{h}{6} z_0,$$

$$b_{n-1} = \frac{1}{h} (f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) - \frac{h}{6} z_n.$$

Ns. luonnollinen splini saadaan valinnoilla $z_0 = z_n = 0$.

Muita valintoja: z_0 ja z_n valitaan s.e.

- Splinin ensimmäinen derivaatta päätepisteissä on tarkka;
- kolmas derivaatta on jatkuva pisteissä x_1 ja x_{n-1} , tämä on engl. not-a-knot -ehto.

5 PARAMETRISOIDUT KÄYRÄT

5.1. Bernsteinin polynomit ; $B_k^n(t)$, $t \in [0, 1]$

Määritelmä 5.1.1 $B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$

Bernsteinin polynomeilla on hyödyllisiä ominaisuuksia:

1) $\sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1$ ($= (t + 1 - t)^n$)

2) $0 \leq B_k^n(t) \leq 1$ kaikilla $k, n \geq 0$

3) $B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1$, muuten $B_k^n(0) = B_k^n(1) = 0$.

Kombinatoriikasta saadaan fundamentaali rekursio-ominaisuus:

$$B_k^n(t) = (1-t) B_k^{n-1}(t) + t B_{k-1}^{n-1}(t)$$

5.2 Bezier -käyrät

Käytetään monisten notaatiota, missä $x^k \in \mathbb{R}^n$ (piste).

Määritelmä 5.2.1 Olkoon annettu pistejoukko $\underbrace{x^1, \dots, x^k}_{=x} \in \mathbb{R}^n$;

näiden konvekssi peite on joukko

$$\text{CHull}(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid y = \sum_{i=1}^k a_i x^i, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^k a_i = 1 \right\}$$

Määritelmä 5.2.2 Bezier -käyrä

Pistejoukon x määrittelemä käyrä

$$\beta^n(t) = \sum_{k=0}^n x^k B_k^n(t)$$

on Bezier -käyrä.

$\beta^n(t)$ on pisteiden x (kontrollipisteet, Bezier-pisteet) määrittämän konveksin peitteen sisällä. Bernsteinin polynomien ominaisuuksista seuraa, että käyrä kulkee ensimmäisen ja viimeisen pisteen kautta.

Umpinaiset käyrät : Kontrollipisteet: $x^0 = x^n$

Jos halutaan, että umpinainen käyrä on sileä myös alkupistessä, on alku- ja loppuosan tangenttivektoreiden oltava saman suuntaisia.

Lasketaan derivaatta:

$$\frac{d}{dt} \beta^n(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n x^k B_k^n(t) = (*)$$

$$\text{Bernstein: } \frac{d}{dt} B_k^n(t) = n (B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t))$$

$$(*) = n \sum_{k=0}^n (B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t)) x^k$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} (x^{k+1} - x^k) B_k^{n-1}(t)$$

Huomaa, Bézier-käyrän derivaatta on Bézier-käyrä!

Saadetaan siis:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \beta^n(0) = n(x^1 - x^0) \\ \frac{d}{dt} \beta^n(1) = n(x^n - x^{n-1}) \end{cases}$$

Geometrisesti: x^0, x^1, x^{n-1} ovat samalla suoralla ja x^0 on x^1 :n ja x^{n-1} :n välissä.

Nostoalgoritmi: Kontrollipisteet määrittävät käyrän, mutta käännteinen ei päde yksikäsitteisesti.

Patee:

$$\beta^n(t) = \sum_{k=0}^n x^k B_k^n(t) = \sum_{k=0}^{n+1} y^k B_k^{n+1}(t) = \alpha^{n+1}(t)$$

Sopimukeralla $x^{-1} = x^{n+1} = 0$ saadaan ehto

$$y^k = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) x^k + \left(\frac{k}{n+1}\right) x^{k-1}$$

5.3 De Casteljau - algoritmi

Edellä kuvatut ident voi yhdistää käytännölliseksi algoritmiksi: Oletetaan kontrollipisteet x^0, x^1, \dots, x^n :

(1) Määritellään vakioikäyrät $\beta_i^0(t) = x^i$

(2) $\beta_i^r(t) = (1-t)\beta_i^{r-1}(t) + t\beta_{i+1}^{r-1}(t)$, $r=1, \dots, n$,
 $i=0, \dots, n-r$

Algoritmi päättyy käyrään $\beta_0^n(t)$.

6 NUMEERINEN INTEGROINTI

6.1 Monte Carlo

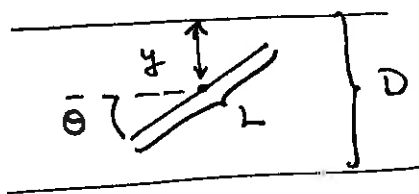
Keskineen raja-arvolause: Oletetaan \bar{X}_i i.i.d. satunnaismuuttujia, keskiarvo μ , varianssi σ^2 . Tällöin ka:lle $A_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_i$ pätee

$$\text{var}(A_N) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{var}(\bar{X}_i) = \frac{\sigma^2}{N}$$

Keskijännöllä σ on sama yksikkö: $\sigma(A_N) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

Suppenemisnopeus Monte Carlo -menetelmällä on siis luokkaa $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, missä N on integroimispuisteiden lkm. Merkittävää on, että näin on dimensiosta riippumatta!

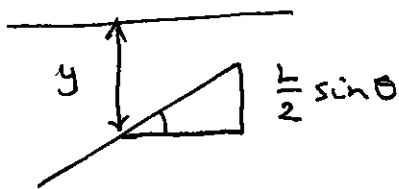
Buffonin neula:



Kahden viivan välinen etäisyys on D . Milla tn L -pitäinen neula leikkaa viivoja?

Neulan k:n etäisyys lähimmästä viivasta olkoon y ja kulma θ .

Valitaan $L = D = 1$; y ja θ satunnaisia jakaumilla $y \sim \text{Unif}(0, \frac{1}{2})$, $\theta \sim \text{Unif}(0, \pi)$.



leikkausehto: $y \leq \frac{1}{2} \sin \theta$

Todennäköisyyden määrittämisen edellyttää pinta-alojen suhteen laskemista: Mahdollisia konfiguraatioita ovat pisteet $[0, \pi] \times [0, \frac{1}{2}]$ eli pinta-ala $\frac{\pi}{2}$, ehdon toteuttavat $\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin \theta d\theta = 1$;

$$P = \frac{1}{(\frac{\pi}{2})} = \frac{2}{\pi}$$

Saamme siis approksimaation: $\pi \approx 2 \left(\frac{\text{heittojen lkm}}{\text{leikkausten lkm}} \right)$

Esimerkki 6.1.1 Vaikea geometria

$$I = \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz, \quad V \text{ on epäyhtälöiden määrittämä}$$

$$\text{Olkoon tiheys } f(x,y,z) = e^{z/2} \cdot \begin{cases} xyz \leq 1, & -5 \leq x \leq 5, \\ & -5 \leq y \leq 5, \\ & -5 \leq z \leq 5. \end{cases}$$

Tiheyden eksponentiaalinen jakauma aiheuttaa sen, että tilavuuden ja massan integraalit yli saman alueen V supenevat eri tavalla: tilavuuden keskihöynte on pienempi.

Usein sopiva muuttujanvaihdos muuttaa tilanteen:

$$u = e^{z/2} \quad : \quad -5 \leq z \leq 5 \quad \rightarrow \quad e^{-2.5} \approx 0.08 \leq u \leq e^{2.5} \approx 12.2$$

$$I = 2 \int_{e^{-2.5}}^{e^{2.5}} \int_{-5}^5 \int_{-5}^5 \begin{cases} 0, & 2xy \ln u > 1 \\ 1, & 2xy \ln u \leq 1 \end{cases} dx dy du$$

Normaalisti keskihajonnan puoltaminen vaatii integroimispuisteiden nelinkertaistamisen.

Tehäväen sovitettu jakauma on usein tehokkaampi.

Esimerkki 6.4.2 Korkea dimensio

Tarkastellaan yleistä tapausa:

$$I = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_m \dots dx_2 dx_1, \left(\underbrace{\iiint \dots \int}_V f dV \right)$$

missä sisempien integraalien rajat voivat olla ulompien muuttujien funktioita: $a_2 \equiv a_2(x_1)$, $b_m \equiv b_m(x_1, \dots, x_{m-1})$

Kuten edellä, jokaiselle dimensiolle saadaan ympäröivän tilavuuden rajat (min/max): $[A_1, B_1]$, $[A_2, B_2]$, ... ja $\hat{V} = [A_1, B_1] \times [A_2, B_2] \times \dots \times [A_m, B_m]$.

Määritellään funktio g s.e.

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{cases} 0, & \text{jos } (x_1, \dots, x_m) \in \hat{V} \setminus V \\ f, & \text{jos } \quad \quad \quad \quad \quad \in V \end{cases}$$

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i \left(\frac{|\hat{V}|}{N} \right), \quad \text{missä } |\hat{V}| = (B_1 - A_1) \dots (B_m - A_m)$$

Korkean dimension tehtävät ovat hyvin ajankohtaisia. Monte Carlo -menetelmät ovat luonnollisia, mutta hidas suppeneminen on kuitenkin ongelmallista.

Esimerkki 6.1.4 MATLAB ; Toinen estimateeri π :lle

Ympyrän pinta-ala : $A = \pi r^2$

Asetetaan $r=1$, jolloin $\hat{V} = [-1, 1] \times [-1, 1]$,
 $|\hat{V}| = 4$

Laskuri :

$$g_i = \begin{cases} 1, & \text{jos piste on ympyrän sisäpuolella} \\ 0, & \text{muutoin} \end{cases}$$

Ohjelma: $N =$ pisteiden lkm

numberin = 0

for $i=1:N$

$$x = 2 * \text{rand} - 1$$

$$y = 2 * \text{rand} - 1$$

$$\text{if } x^2 + y^2 < 1$$

$$\text{numberin} = \text{numberin} + 1$$

end

end

$$\text{pio4} = \text{numberin} / N$$

\rightarrow pinta-alojen suhde = $\frac{\pi}{4}$

$$\text{piapprox} = 4 * \text{pio4}$$

Hajonta? $\text{Var}(a\bar{X}) = a^2 \text{Var}(\bar{X})$

$$\text{varpio4} = (\text{pio4} - \text{pio4}^2) / N \quad ; \quad \text{Var}(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2$$

$$\text{Nyt } X_i^2 = g_i \quad (= g_i)$$

$$\text{varpi} = 16 * \text{varpio4}$$

$$\text{stdpi} = \text{sqrt}(\text{varpi})$$

6.2 Newton-Cotes

Idea: Approksimoidaan integraalia $\int_a^b f(x) dx$ funktion f interpolantin integraalilla.

$$\text{Lagrange: } \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b \left(\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) dx.$$

Tuttu puolisuunnikkasääntö saadaan valinnalla $n=1$:

$$p_1(x) = f(a) \frac{x-b}{a-b} + f(b) \frac{x-a}{b-a},$$

$$\text{eli } \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_1(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

Virhe on interpolatiovirheen integraali; Trapezille

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_1(x) dx &= \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi(x)) \underbrace{(x-a)(x-b)}_{< 0 \text{ ylivälin}} dx \\ &= \frac{1}{2} f''(\eta) \int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= -\frac{1}{12} (b-a)^3 f''(\eta) \end{aligned}$$

Yli $n:n$ osavälin:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

ja virhe $O(h^2)$.

Entä $n=2$?

Vaaditaan:
$$\int_a^b f(x) dx \approx A_1 f(a) + A_2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + A_3 f(b),$$

toivoka kaikille polynomeille astetta 2 (tai alempi).

On ilmeistä, että kertoimet A_i saadaan kantapolynomien integraaleista.

Etenemme kuitenkin määräämättömien kertoimien avulla:

$$\int_a^b 1 dx = b - a \Rightarrow A_1 + A_2 + A_3 = b - a$$

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \Rightarrow A_1 a + A_2 \frac{a+b}{2} + A_3 b = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \Rightarrow A_1 a^2 + A_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + A_3 b^2 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

Saadaan: $A_1 = A_3 = \frac{b-a}{6}, A_2 = \frac{4(b-a)}{6}$

Tämä on ns. Simpsonin sääntö:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Yli n :n osavälillä:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{6} \left[f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + 2f(x_1) + \dots + 2f_{n-1} + 4f_{n-1/2} + f(x_n) \right]$$

$\parallel \qquad \parallel$
 $f(x_{n-1}) \quad f(x_{n-1/2})$

Entä virhe:

Yhdelle välille: $\frac{1}{2880} (b-a)^5 f^{(4)}(\xi)$

ja n :lle osavälille $\mathcal{O}(h^4)$.

Tarkkaa myös 3. asteen polynomeille!

6.3. Gaussin kvadratuurit

Idea: Valitaan pisteet ja painot yhtäaikaisesti.

Ongelma: $n=1$:
$$\int_a^b f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

Kuten edellä:

$$\int_a^b 1 dx = b-a \Rightarrow A_0 + A_1 = b-a$$

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \Rightarrow A_0 x_0 + A_1 x_1 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \Rightarrow A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

Saadetaan epälineaarinen yhtälöryhmä!

Ratkaisu: Ortogonaalipolynomit

Määritelmä 6.3.1 Kaksi polynomia ovat keskenään

ortogonaalisia yli välin $[a, b]$, jos niiden sisätulo on nolla.

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x) dx = 0$$

Ortonormaaleille $\langle p, p \rangle = \langle q, q \rangle = 1$.

Gram-Schmidt: $\{1, x, x^2, \dots\} \rightarrow \{q_0, q_1, q_2, \dots\}$

$$q_0 = 1 / \left[\int_a^b 1^2 dx \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

ortonormaaleja

For $j=1, 2, \dots$

Huom! $\|q(x)\| \equiv \left[\int_a^b (q(x))^2 dx \right]^{1/2}$

$$\tilde{q}_j(x) = x q_{j-1}(x) - \sum_{i=0}^{j-1} \langle x q_{j-1}(x), q_i(x) \rangle q_i(x)$$

$$q_j(x) = \tilde{q}_j(x) / \|\tilde{q}_j(x)\|$$

Havainto: $q_{j-1}(x)$ on ortogonaalinen kaikille polynomeille astetta $j-2$ tai alempi.

$$\langle x q_{j-1}(x), q_i(x) \rangle = \langle q_{j-1}(x), x q_i(x) \rangle = 0, \\ i \leq j-3$$

$$\Rightarrow \tilde{q}_j(x) = x q_{j-1}(x) - \langle x q_{j-1}(x), q_{j-1}(x) \rangle q_{j-1}(x) \\ - \langle x q_{j-1}(x), q_{j-2}(x) \rangle q_{j-2}(x)$$

Saadaan siis kolmen termin rekursio!

Kvadratuuripisteet ovat ortogonaalipolynomien nollakohtia:

Lause 6.3.2 Olkoot x_0, x_1, \dots, x_n ortogonaalipolynomien $q_{n+1}(x)$ nollakohdat välillä $[a, b]$.

Tällöin

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

missä

$$A_i = \int_a^b \varphi_i(x) dx, \quad \varphi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

on tarkka kaikille polynomeille astetta $2n+1$ (tai alempi).

Todistus

Olkoon f polynomi enintään astetta $2n+1$.

Kun f jaetaan q_{n+1} :llä, on jakojäännös enintään astetta n . Jakoalgoritmi:

$$f = q_{n+1} P_n + r_n \quad \text{ja} \quad f(x_i) = r_n(x_i), \\ q_{n+1}(x_i) = 0.$$

Integroidaan:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b q_{n+1}(x) P_n(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx \\ \underbrace{\int_a^b q_{n+1}(x) P_n(x) dx}_{\langle q_{n+1}(x), P_n(x) \rangle = 0} \\ = \int_a^b r_n(x) dx \\ = \sum_{i=0}^n A_i r_n(x_i) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \quad \square$$

Määritelmä 6.3.3 Painotetut ortogonaalipolynomit

Määritellään sisätulo $\langle p, q \rangle_w = \int_a^b p(x) q(x) w(x) dx$,
missä $w(x)$ on positiivinen painofunktio.

Lause 6.3.4 Korvaa L6.3.2:ma: q_{n+1} w -ortogonaalinen

$$\int_a^b f(x) w(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

$$A_i = \int_a^b \varphi_i(x) w(x) dx.$$

Jälkeen tarkkaa polynomeille astetta $2n+1$ (tai alempi).

Esimerkki 6.3.5 Gaussin kvadratuurit: $x \in [-1, 1]$, $n=1$

Nollakohdat eivät edellytä ortogonalisointia.

Kanta: $\{1, x, x^2\}$

Gram-Schmidt: $\tilde{q}_0 = 1$

$$\tilde{q}_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 = x - \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 1 dx} \cdot 1 = x$$

$$\tilde{q}_2 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1$$

$$- \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

\tilde{q}_2 :n juuret: $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Kaava on siis: $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + A_1 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Tarkka aina x^3 :een saakka!

7 ALKUARVOTEHTÄVÄN NUMEERINEN RATKAISU

$$\text{Yleinen tehtävä: } \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Oletetaan ratkaisun olemassaolo- ja yksikäsitteisyystarkastelu tutuksi. Erityisesti oletetaan funktio f jatkuvaksi ja y :n suhteen Lipschitz-jatkuvaksi: kaikille $y_1, y_2, t \in [a, b]$,

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq L |y_2 - y_1|,$$

missä luku L on eräs vakio, $t_0 \in [a, b]$.

Numeerinen ratkaisu approksimoi alkuehdon määräämää ratkaisukäyrää. Tavalliset menetelmät approksimoivat ratkaisua hetkellä t_{k+1} käyttäen ratkaisua hetkellä t_k . Moniaskelmenetelmät käyttävät syvempää riippuvuutta.

7.1 Eulerin menetelmä

Vakioittainen askel h ; $y_0 = y(t_0)$:

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Pisteestä toiseen kuljetaan tangentin suuntaan ratkaisukäyrällä.

Menetelmä seuraa suoraan Taylorin kaavasta:

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + h y'(t_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k)$$

$$= y(t_k) + h f(t_k, y(t_k)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k),$$

$$\xi_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

Virhelajit: Katkaisuvirhe (lokaali) ja globaali virhe

Nyt $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(t_k, y_k)$, sijoitetaan ratkaisu $y(t_k)$

eli $\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = f(t_k, y(t_k)) + \underbrace{\frac{h}{2} y''(\xi_k)}$

Eulerin menetelmä on 1. kertalukua. lokaali virhe $\mathcal{O}(h)$

Huomaa: Usein katkaisuvirhe ajatellaan muotoon $\mathcal{O}(h^2)$.
Tässä ajatellaan approksimaatiota, jossa vasemmalla puolella on derivaatan approksimaatio.

L

Menetelmä on konsistentti: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = y'(t_k) = f(t_k, y(t_k))$

Katkaisuvirhe $\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Entä globaali virhe? Hetkellä t_k : $|y(t_k) - y_k| \leq ?$

Konvergentti menetelmä: $\max |y(t_k) - y_k| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Lause 7.1.1 Oletetaan yleinen tehtävä hyvin asetetuksi:

Olkoon $T \in [a, b]$, $T > t_0$ ja $h = (T - t_0) / N$. Olkoon

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Oletetaan, että $y_0 \rightarrow y(t_0)$, kun $h \rightarrow 0$. Tällöin kaikille k s.e. $t_k \in [t_0, T]$, $y_k \rightarrow y(t_k)$, kun $h \rightarrow 0$ ja

$$\max_k |y(t_k) - y_k| \rightarrow 0.$$

Todistus Merkittään: $d_j = y(t_j) - y_j$.

Vähenetään Taylor ja Euler:

$$d_{k+1} = d_k + h [f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)] + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k)$$

Lipschitz ja $|y''(t_k)| \leq M$:

$$\begin{aligned} |d_{k+1}| &\leq |d_k| + hL |d_k| + \frac{h^2}{2} M \\ &= (1 + hL) |d_k| + \frac{h^2}{2} M \end{aligned}$$

Yleisesti pätee: $y_{k+1} \leq (1 + \alpha) y_k + \beta$, $k = 0, 1, \dots$

$$\Rightarrow y_n \leq e^{n\alpha} y_0 + \frac{e^{n\alpha} - 1}{\alpha} \beta \quad \alpha > 0, \beta \geq 0$$

$$\text{eli } |d_{k+1}| \leq e^{(k+1)hL} |d_0| + \frac{e^{(k+1)hL} - 1}{L} \frac{h}{2} M$$

$kh \leq T - t_0$:

$$\max_k |d_k| \leq \underbrace{e^{L(T-t_0)}}_{\rightarrow 0 \text{ (kun } h \rightarrow 0)} |d_0| + \underbrace{\frac{e^{L(T-t_0)} - 1}{L} \frac{h}{2} M}_{\rightarrow 0}$$

Eulerin menetelmälle saadaan siis globaali virhe $\Theta(h)$. \square

Samalla tekniikalla voi tarkastella pyöristysvirheen vaikutusta lasketaan liukulukuratkaisun ja tarkan aritmetiikan erotus: (vastaavien merkinnöin)

$$|d_{k+1}| \leq (1 + hL) |d_k| + \delta$$

$$\Rightarrow |d_{k+1}| \leq \underbrace{e^{L(T-t_0)}}_{\text{virhe alensa}} |d_0| + \underbrace{\frac{e^{L(T-t_0)} - 1}{hL}}_{\text{dominoi pienillä } h \text{ in arvoilla}} \delta$$

Ohje: Minimoi globaali virhe unohtamatta pyöristystä!

Eksplisittinen vs implisittinen menetelmä:

Kvadratuurit:

$$y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} f(s, y(s)) ds$$
$$= \frac{h}{2} [f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h))] + \mathcal{O}(h^3)$$

antaa tapetin:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})]$$

Menetelmä on implisittinen, y_{k+1} on ratkaistava joka askelilla jollain yhtälön ratkaisumenetelmällä. Eulerin menetelmä on eksplisittinen y_{k+1} saadaan summeeraamalla; y_{k+1} on vain toisella puolella yhtälöä.

Idea: Ennustetaan ja korjataan

Heunin menetelmä:

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k); \text{ ennustus}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})]; \text{ korjaus}$$

Formaalisti: 2. kertaluvun Runge-Kutta

$$\tilde{y}_{k+\alpha} = y_k + \alpha hf(t_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + \beta hf(t_k, y_k) + \gamma hf(t_k + \alpha h, \tilde{y}_{k+\alpha})$$

Kolme parametria: $\alpha, \beta, \gamma \Rightarrow$ Sovitetaan Taylorin kehitykseen!

Heun: $\alpha = 1, \beta = \gamma = \frac{1}{2}$

Yleisesti: $\beta + \gamma = 1, \alpha\gamma = \frac{1}{2}$

Kaikille tällaisille menetelmille katkaisuvirhe on $\mathcal{O}(h^2)$.

7.2 Synteesi : $y_{k+1} = y_k + h \Psi(t_k, y_k, h)$

a) konsistenssi :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Psi(t, y, h) = f(t, y)$$

b) stabiiliisuus : Jos on olemassa vakio K ja askelpituus $h_0 > 0$ s.e.

$$|y_n - \tilde{y}_n| \leq K |y_0 - \tilde{y}_0|,$$

missä y_n, \tilde{y}_n ovat ratkaisuja ja y_0, \tilde{y}_0 alkuearvoja, pätee kun $h \leq h_0$ ja $nh \leq T - t_0$, niin menetelmä on stabiili.

c) a) & b) \Rightarrow menetelmä on konvergentti

Jos katkaisuvirhe on muotoa

$$\tau(t, h) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Psi(t, y(t), h),$$

nun stabiili menetelmä, jonka katkaisuvirhe on $\mathcal{O}(h^p)$, on globaalitua virheellään luokkaa $\mathcal{O}(h^p)$.

Huomaa! Todistus on vastaava kuin Eulerin menetelmälle.

$$\Gamma \quad y_{k+1} \leq (1+\alpha) y_k + \beta \quad \Rightarrow \quad y_n \leq e^{n\alpha} y_0 + \frac{e^{n\alpha} - 1}{\alpha} \beta \quad ?$$

$$y_n \leq (1+\alpha)^2 y_{n-2} + [(1+\alpha) + 1] \beta$$

$$\leq (1+\alpha)^n y_0 + \left[\sum_{j=0}^{n-1} (1+\alpha)^j \right] \beta$$

$$= \frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha}$$

$$(1+\alpha) \leq e^\alpha = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \xi, \quad \xi \in (0, \alpha)$$

L

Euler systeemeille:

$$\underline{y}' = f(t, \underline{y}), \quad \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{y}_{k+1} = \underline{y}_k + h \underline{f}(t_k, \underline{y}_k)$$

eli komponentteittain: $y_{i,k+1} = y_{i,k} + h f_i(t_k, y_{1k}, \dots, y_{nk}), \quad i=1, \dots, n$

L

7.3 Moniaskelemen menetelmät

Tarkastellaan (jälleen) integraalia

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y(s)) ds.$$

Idea: Korvataan $f(t, y)$ sopivalla interpolaatiopolynomilla, joka ottaa ratkaisuhistorian huomioon.

Jos t_{k+1} on mukana, on menetelmä implisiittinen.

Adams-Bashforth: Eksplisiittinen

Interpoloidaan pisteinä $t_k, t_{k-1}, \dots, t_{k-m+1}$; $P_{m-1}(s)$

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_{m-1}(s) ds = y_k + h \sum_{l=0}^{m-1} b_l f(t_{k-l}, y_{k-l}),$$

$$\text{missä } b_l = \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{m-1} \frac{s - t_{k-j}}{t_{k-l} - t_{k-j}} \right) ds.$$

Jos $m=1$, saadaan Eulerin menetelmä!

Luentotehtävä: Millainen menetelmä saadaan, kun $m=2$?

$$y_{k+1} = y_k + h \left[\frac{3}{2} f(t_k, y_k) - \frac{1}{2} f(t_{k-1}, y_{k-1}) \right]$$

Katkaisuvirhe on $\mathcal{O}(h^m)$. (Integraalin virhe $\mathcal{O}(h^{m+1})$.)

Adams-Moulton : Implisittinen

Otetaan piste t_{k+1} mukaan ; $q_m(s)$:

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{l=0}^m C_l f(t_{k+1-l}, y_{k+1-l}),$$

missä

$$C_l = \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^m \frac{s - t_{k+1-j}}{t_{k+1-l} - t_{k+1-j}} \right) ds.$$

Jos $m=0$, saadaan $y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1})$
eli ns. implisittinen Eulerin menetelmä.

Luentotehtävä : Millainen menetelmä saadaan, kun $m=1$?

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)]$$

eli trapetsi!

Katkaisuvirhe on $\mathcal{O}(h^{m+1})$.

Yleinen muoto : $\sum_{l=0}^m a_l y_{k+l} = h \sum_{l=0}^m b_l f(t_{k+l}, y_{k+l}),$

$a_m = 1$; $b_m = 0 \Rightarrow$ eksplisittinen, muuten implisittinen.

Korkea katkaisuvirheen kertaluku ei implikoii stabiilisuuksi!

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = h \left[\frac{13}{12} f(t_{k+2}, y_{k+2}) - \frac{5}{3} f(t_{k+1}, y_{k+1}) - \frac{5}{12} f(t_k, y_k) \right]$$

Tehtävä : $y' = 0, y(0) = 1$

$$y_1 = 1 + \delta$$

$$y_2 = 3y_1 - 2y_0 = 1 + 3\delta$$

...

$$y_k = 3y_{k-1} - 2y_{k-2} = 1 + (2^k - 1)\delta$$

$$\delta \sim 2^{-53}$$

$$\Rightarrow k = 100$$

antaa virheen

$$\sim 2^{47} (!)$$

8 Konkreet differentiaaliyhtälöt

Ongelma: Ratkaisu sisältää erillaisia aikaskaaloja.

Mallitehtävä:

$$\begin{cases} y_1' = -100y_1 + y_2 \\ y_2' = -\frac{1}{10}y_2 \end{cases} \Leftrightarrow y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ratkaisu: } \begin{cases} y_1(t) = e^{-100t} \left(y_1(0) - \frac{10}{999} y_2(0) \right) + e^{-\frac{t}{10}} \frac{10}{999} y_2(0) \\ y_2(t) = e^{-t/10} y_2(0) \end{cases}$$

Kysymys: Voiko tehtävän ratkaista Eulerin menetelmällä?
Voiko askel pituuden valita vapaasti?
(Kaikki on kunnossa, jos $h \rightarrow 0$.)

$$\begin{aligned} \text{Komponentti 2: } y_{2,k+1} &= \left(1 - \frac{h}{10}\right) y_{2,k} \\ \Rightarrow y_{2,k} &= \left(1 - \frac{h}{10}\right)^k y_2(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Komponentti 1: } y_{1,k+1} &= (1 - 100h) y_{1,k} + h y_{2,k} \\ &= (1 - 100h) y_{1,k} + h \left(1 - \frac{h}{10}\right)^k y_2(0) \\ &= (1 - 100h)^2 y_{1,k-1} + h \left[(1 - 100h) \left(1 - \frac{h}{10}\right)^{k-1} + \left(1 - \frac{h}{10}\right)^k \right] y_2(0) \\ &\dots \\ &= (1 - 100h)^{k+1} y_1(0) + h \left(1 - \frac{h}{10}\right)^k \left[\sum_{l=0}^k \left(\frac{1 - 100h}{1 - \frac{h}{10}} \right)^l \right] y_2(0) \end{aligned}$$

mistä lopulta:

$$\begin{aligned} y_{1,k+1} &= (1 - 100h)^{k+1} \left[y_1(0) - \frac{10}{999} y_2(0) \right] \\ &\quad + \left(1 - \frac{h}{10}\right)^{k+1} \frac{10}{999} y_2(0) \end{aligned}$$

Nähdään välittömästi, että jos $h > \frac{1}{50}$, niin $|1 - 100h| > 1$ ja $(1 - 100h)^{k+1}$ kasvaa geometrisesti. Vaikka alkuehdot takaisivat, että $y_1(0) - \frac{10}{999} y_2(0) = 0$, niin pyöristysvirhe vahvistuu rajatta.

Tässä tapauksessa Eulerin menetelmä on epästabili, kun $h > 1/50$.

8.1 Absoluuttinen stabiilisuus

Yleinen tehtävä: $y' = \lambda y \Rightarrow y = e^{\lambda t} y(0)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Tiedetään, että $y(t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$ vain jos $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Systemi: $y' = Ay$; A $n \times n$ -matriisi

Oletetaan, että A on diagonalisoitava

$$A = V \Lambda V^{-1},$$

mikä Λ on ominaisarvojen muodostama lävistäjämatrissi ja V :n sarakkeet ovat ominaisvektorit.

Muuttujanvaihdolla $\tilde{y} = V^{-1} y$ saadaan

$$\tilde{y}' = \Lambda \tilde{y} \quad \text{eli} \quad \tilde{y}_i' = \lambda_i \tilde{y}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Muunnettu systemi suppeee muutettuna koordinaatistossa, mikä ei aina ole yksinkertaista tulkita.

Mutta, seuraava määritelmä on joka tapauksessa mielekäs:

Määritelmä 8.1.1 Absoluuttisen stabiilisuuden alue

on joukko $\{h \lambda \in \mathbb{C} \mid y_k \rightarrow 0, \text{ kun } k \rightarrow \infty\}$,

mikä y_k on yleisen tehtävän ratkaisu ja

h on kiinteä askelpituus, $h > 0$.

Määritelmä 8.1.2 A-stabiilisuus

Menetelmä on A-stabiili, jos sen absoluuttisen stabiilisuuden alue sisältää koko vasemman puolitason.

Huomio: Absoluuttisen stabiilisuuden alueella pätee:

$$\text{Jos } z_{k+1} = (1+h\lambda)z_k, z_k \neq y_k, \text{ niin}$$

$$z_{k+1} - y_{k+1} = (1+h\lambda)(z_k - y_k)$$

$$\Rightarrow |z_{k+1} - y_{k+1}| \leq |z_k - y_k|$$

Esimerkki 8.1.3 Implisiittinen Eulerin menetelmä

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_{k+1} \Rightarrow y_{k+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_k = \dots = \frac{1}{(1-h\lambda)^{k+1}} y_0$$

Absoluuttinen stabiilisuus: $\{h\lambda \mid |1-h\lambda| > 1\}$

$$|1-h\lambda| = \sqrt{(1-h\operatorname{Re}\lambda)^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2} > 1, \text{ kun } \operatorname{Re}\lambda < 0.$$

Implisiittinen Eulerin menetelmä on A-stabiili.

Voidaan osoittaa, että eksplisiittisiä A-stabiileja lineaarisia monieskalmenetelmiä ei ole olemassa.

Lause 8.1.4 Korkeimman kertaluvun A-stabiililla monieskalmenetelmällä on kertaluku = 2.

Masentavaa. On kuitenkin mahdollista laatia menetelmiä, joilla on korkea kertaluku ja joiden absoluuttisen stabiilisuuden alue on "melkein" koko vasen puolitaso.

8.2 Erityisiä menetelmiä

BDF - menetelmät : Backward Differentiation Formulas

m-askel menetelmä kertalukua m: $\sum_{l=0}^m a_l y_{k+l} = h b_m f(t_{k+m}, y_{k+m})$
Kaikki implisiittisiä.

Pätee:

Lause 8.2.1 Moniaskelmenetelmän katkaisuvähen kertalukua

$p \geq 1$, jos ja vain jos

$$\sum_{l=0}^m a_l = 0 \text{ ja } \sum_{l=0}^m l^j a_l = j \sum_{l=0}^m l^{j-1} b_l, \quad j=1, \dots, p.$$

Lauseen avulla valitaan sopivia kertoimia:

$$m=1: a_0 + a_1 = 0, \quad 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 = b_1$$

$$\text{Valitaan (aina) } a_1 = 1 \Rightarrow a_0 = -1, \quad b_1 = 1$$

$$\text{Saadaan: } y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

eli implisiittinen Euler.

Näin jatketaan, mutta kun $m=3$, ei saatu menetelmä
vrti olla A-stabiili.

IRK - menetelmät : Implicit Runge-Kutta

$$\xi_j = y_k + h \sum_{i=1}^v a_{ji} f(t_k + c_i h, \xi_i), \quad j=1, \dots, v,$$

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=1}^v b_j f(t_k + c_j h, \xi_j)$$

Vapaat parametrit: a_{ji}, b_j, c_j , konsistenssi: $\sum_{i=1}^v a_{ji} = c_j$,
 $j=1, \dots, v$.

Kaikille $v \geq 1$ on olemassa

yksikäsitteinen A-stabiili IRK kertalukua $2v$.

8.3 Implisiittiset systeemit

Moniaskelmenetelmä: $b_m \neq 0$

$$\underline{y}_{k+m} = h b_m \underline{f}(t_{k+m}, \underline{y}_{k+m}) + \underline{y}^*,$$

$$\text{missä } \underline{y}^* = h \sum_{l=0}^{m-1} b_l \underline{f}(t_{k+l}, \underline{y}_{k+l}) - \sum_{l=0}^{m-1} a_l \underline{y}_{k+l}$$

on tunnettu.

IRK:

$$\begin{pmatrix} \underline{y}_k \\ \vdots \\ \underline{y}_k \\ \vdots \\ \underline{y}_{k+1} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^v a_{1i} \underline{f}(t_k + c_i h, \underline{y}_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^v a_{vi} \underline{f}(t_k + c_i h, \underline{y}_i) \\ \vdots \\ \sum_{d=1}^v b_d \underline{f}(t_k + c_d h, \underline{y}_d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{y}_k \\ \vdots \\ \underline{y}_k \\ \vdots \\ \underline{y}_k \end{pmatrix}$$

Yleinen muoto: $\underline{w} = h \underline{g}(\underline{w}) + \underline{y}^*$;

$$\underline{g}(\underline{w}) \equiv \underline{w} - h \underline{g}(\underline{w}) - \underline{y}^* = \underline{0}$$

Newtonin menetelmä:

Alkuarvauks $\underline{w}^{(0)}$; Taylorin kehitys \underline{g} :lle $\underline{w}^{(0)}$:ssä:

$$\begin{pmatrix} g_1(w_1, \dots, w_n) \\ \vdots \\ g_n(w_1, \dots, w_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}) \\ \vdots \\ g_n(w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_1}{\partial w_i}(\underline{w}^{(0)}) (w_i - w_i^{(0)}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_n}{\partial w_i}(\underline{w}^{(0)}) (w_i - w_i^{(0)}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\|\underline{w} - \underline{w}^{(0)}\|^2) \\ \vdots \\ \mathcal{O}(\|\underline{w} - \underline{w}^{(0)}\|^2) \end{pmatrix}$$

eli matriksimuodossa :

$$\underline{q}(\underline{w}) = \underline{q}(\underline{w}^{(0)}) + \underbrace{J_{\underline{q}}(\underline{w}^{(0)})}_{\text{Jakobiaani evaluoituna}} (\underline{w} - \underline{w}^{(0)}) + \Theta(\|\underline{w} - \underline{w}^{(0)}\|^2)$$

pisteessä $\underline{w}^{(0)}$.

Pudotetaan kvadraattinen termi pois ja ratkaistaan $\underline{q}(\underline{w}) = \underline{0}$:

$$\underline{w}^{(1)} = \underline{w}^{(0)} - [J_{\underline{q}}(\underline{w}^{(0)})]^{-1} \underline{q}(\underline{w}^{(0)}),$$

on saatu Newtonin menetelmän askel.

Havaintoja: a) Matriisin kääntäminen tarkoittaa yhtälöryhmän ratkaisua.

b) Jakobiaanin on oltava säännöllinen.

c) Alkuarvauksen on oltava tarpeeksi hyvä.

Tässä kontekstissa: $\underline{q}(\underline{w}) = \underline{0}$; saadaan

$$\underline{w}^{(j+1)} = \underline{w}^{(j)} - \underbrace{[I - h J_{\underline{q}}(\underline{w}^{(j)})]^{-1}}_{\text{Riittävän pienillä}} (\underline{w}^{(j)} - h \underline{q}(\underline{w}^{(j)}) - \underline{f})$$

h aina säännöllinen.

Tulkinna : Ennenaskelen virhe saa olla luokkaa $\Theta(h)$.