

FIGURE 1. Descartesin käyrä.

1. BÉZIER-KÄYRÄT

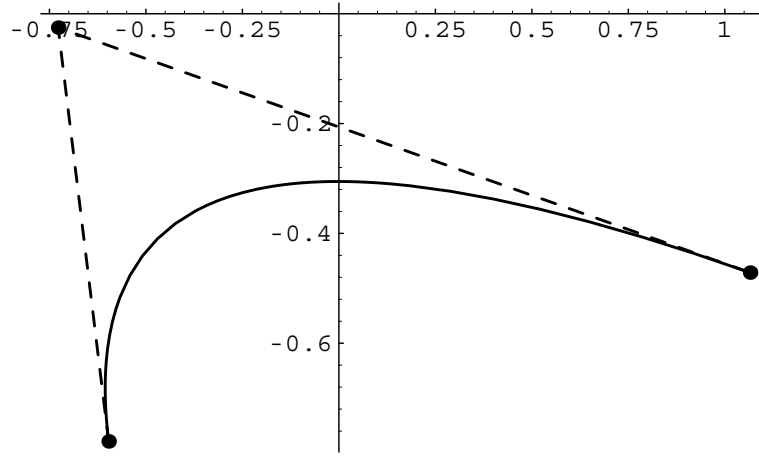
1.1. **Taustaa.** Bézier ja de Casteljou keksivät toisistaan riippumatta Bézier-käyrät 60-luvun alussa. Bézier oli Renault'n ja de Casteljou Citroënin insinööri ja molempien ongelmana oli parantaa ja nopeuttaa auton muodon suunnittelua. Heidän ratkaisunsa näihin ongelmiin johti erilaisten CAD (computer aided design) ja CAM (computer aided manufacturing) järjestelmien toteuttamiseen. Seuraava lainaus Bézier'ltä kertoo syistä, miksi perinteiset menetelmät hylättiin (lainaus, kuten muukin materiaali Bézier-käyrästä on kirjasta [1]).

The final standard was the "master model", whose shape, for many reasons, could not coincide with the curves traced on the drawing board. This inconsistency resulted in discussions, arguments, retouches, expenses and delay. It was certain that only numbers, transmitted from drawing office to tool drawing office, manufacture, patternshop and inspection, could provide an answer; of course, drawings would remain necessary, but they would only be explanatory, their accuracy having no importance. Numbers would be the only and final definition.

Pian tämän jälkeen USAssa ryhdyttiin lentokoneiteollisuudessa aktiivisesti tutkimaan ja käyttämään samantyyppisiä järjestelmiä. Alussa luonnollisesti vain suurteollisuudella oli varaa näihin järjestelmiin, mutta nykyään ohjelmistot pyörivät hyvin jo mikroissa. Käytännössä halutaan tietysti käsitellä pintoja, mutta yksinkertaisuuden vuoksi seuraavassa puhutaan vain tasokäyrästä; perusideat ovat kuitenkin samat molemmissa tapauksissa. Koko ajan tarkastellaan *parametrisoituja käyriä*; nämä ovat välttämättömiä systeemin joustavuuden kannalta. Esimerkiksi kuvan 1 käyrää ei voida esittää muodossa $x_2 = f(x_1)$, koska tiettyjä x_1 :n arvoja vastaa kolme x_2 :n arvoa, mutta parametrimuodossa käyrää voidaan helposti käsitellä: kuvan käyrä on

$$c(t) = \left(\frac{6t}{1+t^3}, \frac{6t^2}{1+t^3} \right)$$

1.2. **De Casteljou-algoritmi.** Olkoon annettu tason pisteet x^0 , x^1 ja x^2 . Muodostetaan suorat $s_1(t) = (1-t)x^0 + tx^1$ ja $s_2(t) = (1-t)x^1 + tx^2$ ja näitten avulla toisen

FIGURE 2. s_1 , s_2 ja c

asteen käyrä

$$c(t) = (1 - t)s_1(t) + ts_2(t)$$

Kun valitaan $x^0 = (-0.60, -0.78)$, $x^1 = (-0.73, -0.03)$ ja $x^2 = (1.07, -0.47)$ ja tarkastellaan vain parametrin arvoja $0 \leq t \leq 1$ saadaan tulokseksi kuva 2. Erityisesti huomataan, että c pysyy pisteitten määrittelemän kolmion sisäpuolella. Tämä on de Casteljaun algoritmin idea: yhdistellään edellä kuvatulla tavalla käyriä jolloin uudet käyrät pysyvät 'pisteitten sisällä' eli hallinnassa. Matematiikassa käytetään termiä *konvekssi peite*. Tämä voidaan määritellä seuraavasti: olkoon annettu tason pisteet x^0, x^1, \dots, x^n ; laitetaan jokaiseen pisteeseen nasta ja venytetään kuminauha siten että kaikki pisteet jäävät kuminauhan sisäpuolelle. Kun kuminauhasta päästetään irti, niin se jää tiettyjen nastojen varaan. Kuminauhan sisäpuolella oleva alue on kyseisten pisteitten konvekssi peite. Kuvassa 3 on esimerkki, jossa siis pisteitten konvekssi peite on katkoviivan sisään jäämä alue. Muodollinen määritelmä joka toimii myös yleisesti \mathbb{R}^n :ssä on seuraavanlainen

Määritelmä 1.1. *Olkoon annettu pisteet $x^1, \dots, x^k \in \mathbb{R}^n$; näitten konvekssi peite on joukko*

$$KP = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = \sum_{i=1}^k a_i x^i, a_i \geq 0, \sum_{i=1}^k a_i = 1\}$$

Olkoon annettu tason pisteet x^0, x^1, \dots, x^n . De Casteljaun algoritmi on seuraavanlainen.

1. määritellään vakiokäyrät $\beta_i^0(t) = x^i$
2. $\beta_i^r(t) = (1 - t)\beta_i^{r-1}(t) + t\beta_{i+1}^{r-1}(t)$, missä $r = 1, \dots, n$ ja $i = 0, \dots, n - r$

Algoritmi pysähtyy kun päästään käyrään β_0^n , jota sanotaan pistejoukon määrittelemäksi *Bézier-käyräksi*. Yleensä tässä lopullisessa käyrässä jätetään alaindeksi nolla pois ja merkitään β^n . Pisteitä x^i sanotaan käyrän *kontrollipisteiksi* tai *Bézier-pisteiksi*. Bézier-käyrällä on seuraavat ominaisuudet:

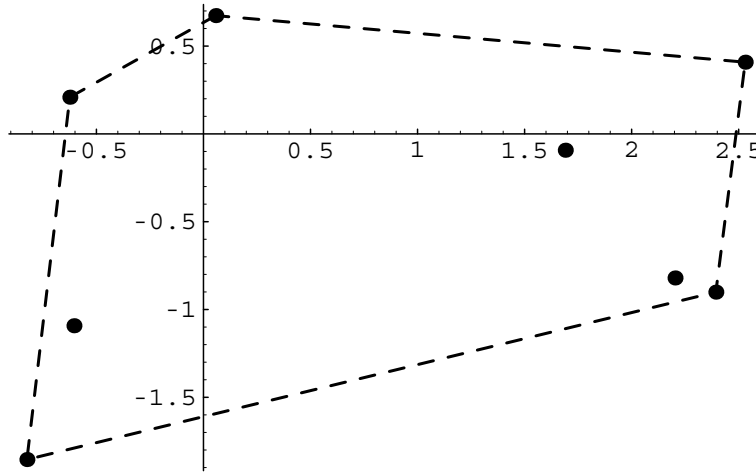


FIGURE 3. Pistejoukon konvekssi peite

1. β^n kuuluu pisteitten x^i määrittelemään konvekssiin peitteeseen
2. $\beta^n(0) = x^0$ ja $\beta^n(1) = x^n$

Siis Bézier-käyrä kulkee ensimmäisen ja viimeisen, mutta yleensä ei minkään muun kontrollipisteen kautta.

Esimerkki 1.1. Olkoon annettu pisteet $x^0 = (-1, 0)$, $x^1 = (1, 4)$ ja $x^2 = (2, 1)$. Algoritmi etenee seuraavasti: ensin määritellään vakiokäyrät $\beta_0^0(t) = (-1, 0)$, $\beta_1^0(t) = (1, 4)$ ja $\beta_2^0(t) = (2, 1)$. Näistä saadaan kaksi suoraa $\beta_0^1(t) = (1-t)\beta_0^0(t) + t\beta_1^0(t) = (2t-1, 4t)$ ja $\beta_1^1(t) = (1-t)\beta_1^0(t) + t\beta_2^0(t) = (t+1, -3t+4)$, jotka yhdistämällä saadaan lopullinen Bézier-käyrä.

$$\beta^2(t) = \beta_0^2(t) = (1-t)\beta_0^1(t) + t\beta_1^1(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + 4t - 1 \\ -7t^2 + 8t \end{pmatrix}$$

1.3. **Bernsteinin polynomit.** Bernsteinin polynomit B_k^n määritellään seuraavasti:

$$B_k^n(t) = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k}$$

Tässä, kuten ennenkin tarkastellaan vain väliä $0 \leq t \leq 1$. Bernsteinin polynomeilla on seuraavat ominaisuudet:

1. $B_k^n(t) \geq 0$ kaikilla $k, n \geq 0$
2. $\sum_{k=0}^n B_k^n(t) = 1$ kaikilla t , koska

$$1 = (t + 1 - t)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^n B_k^n(t)$$

3. edellisistä kohdista seuraa heti että $0 \leq B_k^n(t) \leq 1$ kaikilla k, n

$$4. B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1, \text{ muissa tapauksissa } B_k^n(0) = B_k^n(1) = 0$$

$$5. B_k^n(t) = (1-t)B_{k-1}^{n-1}(t) + tB_{k+1}^{n-1}(t)$$

Viimemainittu ominaisuus on itse asiassa sama kuin de Casteljau-algoritmin rekursiokaava, ja osoittautuu että Bézier-käyrä saadaan suoraan Bernsteinin polynomien avulla seuraavasti

$$\beta^n(t) = \sum_{k=0}^n x^k B_k^n(t)$$

Tämä muoto on usein kätevämpi teoreettisissa tarkasteluissa, kun taas de Casteljau-algoritmi on laskennallisesti parempi. Esimerkiksi Bernsteinin polynomien ominaisuudesta (4) seuraa suoraan, että $\beta^n(0) = x^0$ ja $\beta^n(1) = x^n$. Lisäksi varsin helposti nähdään, että jos pisteitten järjestys on päinvastainen itse käyrä ei muutu. Tarkemmin: jos määritellään

$$\beta^n(t) = \sum_{k=0}^n x^k B_k^n(t) \quad \alpha^n(t) = \sum_{k=0}^n x^{n-k} B_k^n(t)$$

niin $\alpha(1-t) = \beta(t)$.

Esimerkki 1.2. Tarkastellaan edellisen esimerkin pistejoukkoa. Käänteisessä järjestyksessä saadaan

$$\alpha^2(t) = (1-t)^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2t(1-t) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 - 2t + 2 \\ -7t^2 + 6t + 1 \end{pmatrix}$$

Helposti nähdään, että $\alpha^2(1-t) = \beta^2(t)$.

1.4. **Bézier-käyrän derivaatta.** Lasketaan ensin Bernsteinin polynomien derivaatta.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_k^n(t) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(kt^{k-1}(1-t)^{n-k} - (n-k)t^k(1-t)^{n-k-1} \right) \\ &= n \left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} t^{k-1}(1-t)^{n-k} - \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} t^k(1-t)^{n-k-1} \right) \\ &= n \left(B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t) \right) \end{aligned}$$

Siispä

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \beta^n(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^n x^k B_k^n(t) = n \sum_{k=0}^n \left(B_{k-1}^{n-1}(t) - B_k^{n-1}(t) \right) x^k = \\ &= n \left(\sum_{k=1}^n B_{k-1}^{n-1}(t) x^k - \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) x^k \right) = \\ &= n \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) x^k \right) = n \sum_{k=0}^{n-1} (x^{k+1} - x^k) B_k^{n-1}(t) \end{aligned}$$

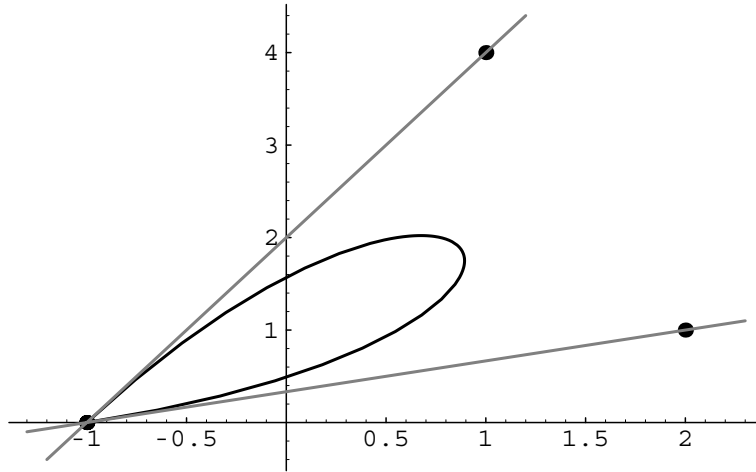


FIGURE 4. β^3 ja tangenttisuorat

Huomaa, että toisen yhtäsuuruusmerkin jälkeisessä summalausekkeessa käytetään sopimusta $B_k^n = 0$ jos $k < 0$ tai $k > n$. Samantyyppisellä laskulla saadaan

$$\frac{d^2}{dt^2}\beta^n(t) = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} (x^{k+2} - 2x^{k+1} + x^k) B_k^{n-2}(t)$$

Erityisesti siis Bézier-käyrän derivaatat ovat myös Bézier-käyriä, joten niitä voi käsitellä aivan samoin kuin alkuperäisiä käyriä.

Esimerkki 1.3. Olkoon pisteet edelleen samat kuin edellisessä esimerkissä. Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\beta^2(t) &= 2(1-t) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t + 4 \\ -14t + 8 \end{pmatrix} \\ \frac{d^2}{dt^2}\beta^2(t) &= 2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.5. Umpinaiset käyrät. Umpinaisella käyrällä tarkoitetaan sellaista käyrää, jonka alku- ja loppupiste on sama. Tangenttivektorit alku- ja loppupisteessä ovat

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\beta^n(0) = n(x^1 - x^0) \\ \frac{d}{dt}\beta^n(1) = n(x^n - x^{n-1}) \end{cases}$$

Jos siis $x^0 = x^n$ ja halutaan, että käyrä olisi sileä myös alkupisteessä, niin tangenttivektoreitten $v_a = n(x^1 - x^0)$ ja $v_l = n(x^0 - x^{n-1})$ on oltava samansuuntaisia. Tunnetusti kaksi vektoria on samansuuntaisia, jos on olemassa positiivinen vakio c siten, että $v_a = cv_l$. Geometrisesti v_a :n ja v_l :n samansuuntaisuus tarkoittaa, että pisteet $x^0 = x^n$, x^1 ja x^{n-1} ovat kaikki kolme samalla suoralla ja x^0 on x^1 :n ja x^{n-1} :n välissä.

Esimerkki 1.4. Lisätään esimerkkitietoon $x^3 = x^0 = (-1, 0)$. Lasketaan saatu Bézier-käyrä de Casteljau-algoritmeilla. Huomaa, että esimerkissä 1.1 laskettuja käyriä voi käyttää hyväksi. Tarvitsee siis vain laskea $\beta_3^0 = (-1, 0)$, $\beta_2^1(t) = (-3t + 2, -t + 1)$,

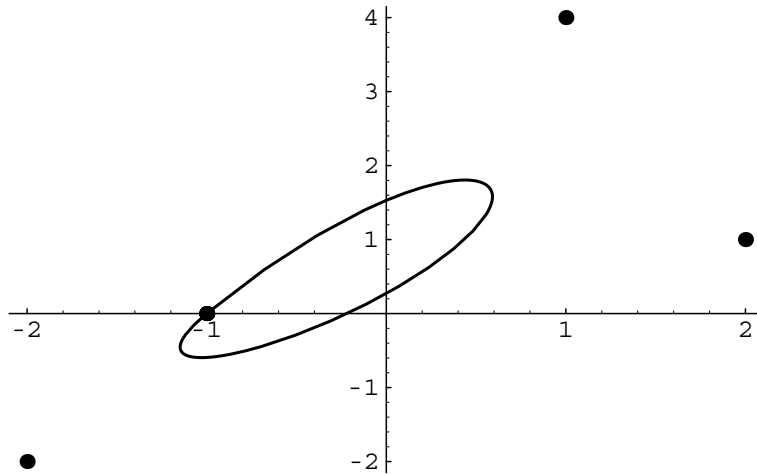


FIGURE 5. Sileä umpinainen käyrä

$\beta_1^2(t) = (-4t^2 + 2t + 1, 2t^2 - 6t + 4)$ ja

$$\beta^3(t) = \beta_0^3(t) = (1-t)\beta_0^2(t) + t\beta_1^2(t) = \begin{pmatrix} -3t^3 - 3t^2 + 6t - 1 \\ 9t^3 - 21t^2 + 12t \end{pmatrix}$$

Tuloksena saadaan kuva 4, johon on myös piirretty tangenttisuorat alkuun ja loppuun. Haluttaisiin kuitenkin derivoituva käyrä myös alku/loppupisteessä. Lisätään siis yksi piste viimeistä edellisiksi pisteeksi eli $x^4 = x^0$ ja $x^3 = (a, b)$, missä a ja b pitäisi laskea. Siispä $x^1 - x^0 = (2, 4)$ ja $x^4 - x^3 = x^0 - x^3 = (-1 - a, -b)$, joten samansuuntaisuusehto antaa $a = -1 - 2/c$ ja $b = -4/c$, missä $c > 0$. Valitaan esimerkiksi $c = 2$. Saatu käyrä on kuvassa 5 ja käyrän lauseke on

$$\beta^4(t) = \begin{pmatrix} 14t^4 - 16t^3 - 6t^2 + 8t - 1 \\ -2t^4 + 28t^3 - 42t^2 + 16t \end{pmatrix}$$

1.6. Nostoalgoritmi. Kun pyritään muodostamaan jokin käyrä, on vaikea alunperin sanoa, montako kontrollipistettä tarvitaan. Jos siis huomataan, että olisi parasta lisätä kontrollipisteitä, niin olisi hyödyllistä tehdä tämä siten, että mahdollinen tyydyttävä välitulos säilyy. Nostoalgoritmi tekee tämän: se lisää kontrollipisteitä, mutta säilyttää käyrän ennallaan.

Olkoon annettu pisteet x^0, \dots, x^n ; halutaan pisteet y^0, \dots, y^{n+1} siten, että

$$\beta^n(t) = \sum_{k=0}^n x^k B_k^n(t) = \sum_{k=0}^{n+1} y^k B_k^{n+1}(t) = \alpha^{n+1}(t)$$

Yhtälöt pisteille y^k voidaan johtaa seuraavasti. Lausekkeissa on käytetty sopimusta $x^{-1} = 0$ ja $x^{n+1} = 0$.

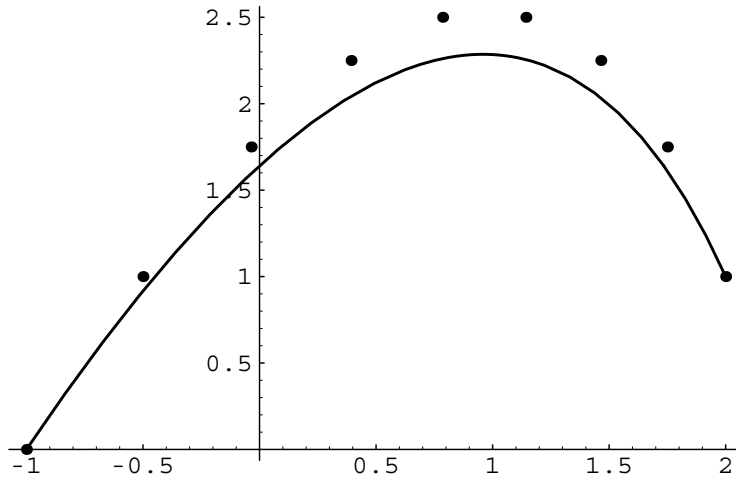


FIGURE 6. Nostoalgoritmin tuottamat pisteet lähestyvät käyrää

$$\begin{aligned}
\beta^n(t) &= (1-t+t)\beta^n(t) = (1-t)\beta^n(t) + t\beta^n(t) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k \left(t^k (1-t)^{n+1-k} + t^{k+1} (1-t)^{n-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k t^k (1-t)^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} x^{k-1} t^k (1-t)^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} x^k + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} x^{k-1} \right) t^k (1-t)^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} y^k t^k (1-t)^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} y^k B_k^{n+1}(t) = \alpha^{n+1}(t)
\end{aligned}$$

Jotta kolmas yhtäsuuruus lopusta päin olisi totta, pitää päteä kaikilla y^k

$$\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} y^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} x^{k-1}$$

Ratkaisemalla y^k saadaan

$$y^k = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) x^k + \frac{k}{n+1} x^{k-1}$$

Eryteisesti siis $y^0 = x^0$ ja $y^{n+1} = x^n$ eli päätepisteet pysyvät paikallaan. Lisäksi uudet pisteet ovat vanhojen pisteitten konveksissa peitteessä. Itse asiassa jos suoritetaan nostoalgoritmi useamman kerran, havaitaan, että saadut pisteet lähestyvät käyrää.

Esimerkki 1.5. Olkoon edelleen $x^0 = (-1, 0)$, $x^1 = (1, 4)$ ja $x^2 = (2, 1)$. Nostoalgoritmi antaa $y^0 = (-1, 0)$, $y^1 = (1/3, 8/3)$, $y^2 = (4/3, 3)$ ja $y^3 = (2, 1)$. Kun iteroidaan algoritmia muutaman kerran, niin havaitaan, että pisteet lähestyvät käyrää, kuva 6.

LÄHDELUETTELO

- [1] G. Farin, *Curves and surfaces for computer aided geometric design*, Academic press, 1988.