1) QM HARMONINEN VÄRÄHTELIJÄ

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \quad , \quad \langle E \rangle = (\langle n \rangle + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

PARTITIOFUNKTIO $\mathcal{Z} = \sum_{n \geq 0} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)} = e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \underbrace{\sum_{n\geq 0} e^{-\beta\hbar\omega n}}_{\text{GEOMETRINEN SARJA}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{Z} = \frac{e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}}$$

KESKIMÄÄRÄINEN ENERGIA ?

1) LASKETAAN $\langle n \rangle = -\frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta}\right) - \frac{1}{2}$

TAI

2) LASKETAAN $\langle E \rangle$ SUORAAN

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{\mathcal{Z}}\left(\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \beta}\right) = -\left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta}\right) \qquad \text{(NOPEAMPI TAPA!)}$$

$$\ln \mathcal{Z} = \ln e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} - \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega})$$

$$-\left(\frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta}\right) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega\, e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

ELI : $\langle E \rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right)\hbar\omega$

$\Rightarrow \langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$ BOSE-EINSTEIN-JAKAUMAFUNKTIO (ERITYISTAPAUS) (SIMON: BOSE OCCUPATION FACTOR)

VAIHDETAAN VIELÄ NOTAATIO SIMONIN MUKAISEKSI

$$\boxed{\langle n \rangle = n_B(\beta\hbar\omega)}$$

KATSOTAAN SITTEN, MITEN VÄRÄHTELIJÄN $\overset{n_B}{\langle n \rangle}$, $\langle E \rangle$ JA $C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}$ KÄYTTÄYTYVÄT KUN
1) $T \to 0$ $(\beta \to \infty)$
2) $T \to \infty$ $(\beta \to 0)$

$\underline{\underline{n_B}}$

$$T \to 0 \quad (\beta \to \infty) \quad \Rightarrow \quad n_B \sim e^{-\beta \hbar \omega}$$
$$T \to \infty \quad (\beta \to 0) \quad \Rightarrow \quad n_B \sim \frac{k_B T}{\hbar \omega} \quad \left(= \frac{1}{\beta \hbar \omega} \right)$$

$\underline{\underline{\langle E \rangle}}$

$$T \to 0 \quad \Rightarrow \quad \langle E \rangle \sim \hbar \omega \left(e^{-\beta \hbar \omega} + \tfrac{1}{2} \right)$$
$$T \to \infty \quad \Rightarrow \quad \langle E \rangle \sim \hbar \omega \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega} + \tfrac{1}{2} \right) = \underline{\underline{k_B T}} + \frac{1}{2} \hbar \omega$$

TAAJUUDESTA RIIPPUMATON LÄMPÖTILARIIPPUVA OSUUS!

$\underline{\underline{\text{OMINAISLÄMPÖ}}}$ $$C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = -k_B \beta^2 \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta}$$

$$T \to 0 \quad \Rightarrow \quad C \sim k_B (\beta \hbar \omega)^2 \underline{e^{-\beta \hbar \omega}}$$

TÄMÄ DOMINOI LÄMPÖTILAKÄYTTÄYTYMISTÄ

$$T \to \infty \quad \Rightarrow \quad C \sim k_B$$

KLASSINEN TULOS!

<u>Huom!</u>

KUN N VÄRÄHTELIJÄÄ, JOTKA EIVÄT VUOROVAIKUTA KESKENÄÄN (ESIM. EINSTEININ MALLIN VÄRÄHTELIJÄT)

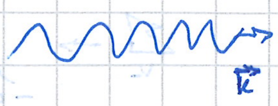
$$Z_N = \prod_{i=1}^{N} Z_i = (Z_1)^N$$

JA $$\ln Z_N = N \ln Z_1$$

2) NORMAALIMOODIT

TARKASTELLAAN VÄLIAINEESSA ETENEVIÄ (MEKAANISIA) AALTOJA, JOIDEN AALTOVEKTORIT OVAT MUOTOA

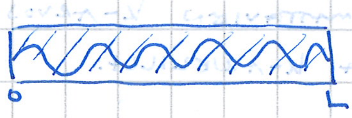
$$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_k$$



$\uparrow$ AALLON ETENEMISSUUNNAN YKSIKKÖVEKTORI

AALTOLUKU $|\vec{k}| = k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

1D-TAPAUS



OMINAISVÄRÄHTELYMOODIT TASOAALTOJA $\sim e^{i(kx-\omega t)}$, JOSTA OTETAAN TARKASTELUN ALLA PAIKKARIIPPUVA OSA e^{ikx}

(HUOM! AALLON AIHEUTTAMA POIKKEAMA ON SIIS $Re(e^{ikx})$)

MINKÄLAISIA MOODEJA SYSTEEMISSÄ VOI OLLA?

KÄYTETÄÄN PERIODISIA REUNAEHTOJA (BORN–VON KÁRMÁN)

$$\psi(x) = \psi(x+L)$$

ELI TASOAALLOILLEMME

$$e^{ikx} = e^{ik(x+L)} \Leftrightarrow e^{ikL} = 1$$

JOSTA SAADAAN AALTOLUVULLE EHTO $kL = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow \boxed{k = \frac{2\pi}{L}n}$$

MIKSI PERIODISTEN REUNAEHTOJEN KÄYTTÖ ON PERUSTELTUA? TODELLINEN RAKENNEHAN ON ÄÄRELLINEN!

1) HELPOTTAA LASKUJA (OK, EI MIKÄÄN PERUSTELU, MUTTA HYVÄ KUITENKIN)

2) VOIDAAN OSOITTAA, ETTÄ HALUAMAMME TILATIHEYS $\tilde{g}(k)$ EI OLE HERKKÄ KÄYTETYILLE REUNAEHDOILLE (PERIODISET, AVOIMET, KIINNITETYT PÄÄT JNE.)

$\Downarrow$

3) PINNASTA AIHEUTUVAT MUUTOKSET VÄRÄHTELYMOODEIHIN (VS. PERIODISET REUNAEHDOT) MITÄTTÖMIÄ BULKKIOMINAISUUKSIEN MÄÄRITTÄMISEN SUHTEEN.

NYT VOISIMME PERIAATTEESSA SUMMATA KAIKKIEN OMINAISVÄRÄHTELYMOODIEN YLI (SALLITUT k:N ARVOT). KÄYTÄNNÖSSÄ TÄMÄ ON KUITENKIN KÖMPELÖÄ, KUN L ON SUURI. SEN SIJAAN VAIHDETAAN SUMMAUS INTEGRAALIIN

$$\sum_k \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \rho_k(k)\,dk \quad ; \quad \rho_k dk = \text{MOODIEN MÄÄRÄ VÄLILLÄ } (k, k+dk)$$

SALLITTUJEN k-ARVOJEN TIHEYS k-AKSELILLA

TARVITAAN VAIN SUMMATTAVIEN k-ARVOJEN TIHEYS $\rho_k(k)$. TARKASTELLAAN MOODEJA k-AKSELILLA:

$$\frac{2\pi(i-1)}{L} \quad \frac{2\pi i}{L} \quad \frac{2\pi(i+1)}{L} \quad \rightarrow k$$

JOLLOIN SIIS k-PISTEIDEN VÄLI ON $\frac{2\pi}{L}$ JA TÄLLÖIN

$$\rho_k = 1 \Big/ \frac{2\pi}{L} = \frac{L}{2\pi}$$

HUOM! KOSKA k-ARVOT OVAT SYMMETRISESTI ORIGON SUHTEEN VOIMME KIRJOITTAA INTEGRAALIN JOKO MUODOSSA

$$\frac{L}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \quad \text{TAI} \quad \frac{L}{\pi}\int_{0}^{k} dk$$

3D TILANNE EI NYT JUURIKAAN POIKKEA EDELLISESTÄ TAPAUKSESTA. NYT PERIODISTEN REUNAEHTOJEN MUKAISESTI SALLITUT MOODIT OVAT

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \quad ; \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$$

TÄSSÄ YKSINKERTAISUUDEN VUOKSI OLETETTU KUUTIOLLINEN SYSTEEMI $L \times L \times L$ (YLEISTYS TAPAUKSEEN $L_x \neq L_y \neq L_z$ ON HELPPO) JA SALLITTUJEN MOODIEN TÄYTYY SIIS TOTEUTTAA PERIODISET REUNAEHDOT ERIKSEEN x-, y-, JA z- SUUNNISSA.

NYT SALLITUT MOODIT OVAT PISTEITÄ $\vec{k}$-AVARUUDESSA (3D), JOSSA TILAVUUS YHTÄ PISTETTÄ KOHDEN ON $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$, ELI MOODIEN TIHEYS ON $\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3$.

TÄLLÖIN SUMMA VOIDAAN VAIHTAA INTEGRAALIKSI $\vec{k}$-AVARUUDEN YLI

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int \underbrace{d^3\vec{k}}_{dk_x dk_y dk_z}$$

HUOMATAAN KUITENKIN, ETTÄ SALLITUT $\vec{k}$-ARVOT OVAT SÄÄNNÖLLISESSÄ (KUUTIOLLISESSA) RAKENTEESSA JA SYMMETRISESTI ORIGON SUHTEEN.

HALUAMAMME ENERGIAN LAUSEKE EI RIIPU $\vec{k}$-VEKTORIEN SUUNNASTA, VAAN AINOASTAAN k-ARVOJEN SUURUUDESTA JA NIIDEN JAKAUTUMISESTA $\vec{k}$-AVARUUDESSA.

VAIHDETAAN SIIS INTEGRAALI YKSITTÄISTEN $\vec{k}$-TILAVUUSELEMENTTIEN $dk_x dk_y dk_z$ YLI PALLOSYMMETRISEEN TARKASTELUUN: MONTAKO $\vec{k}$-PISTETTÄ PALLONKUORESSA, JONKA PINTA-ALA ON $4\pi k$ JA PAKSUUS dk.
(VRT. ESIM. MAXWELLIN JA BOLTZMANNIN JAKAUMAN JOHTO STATISTISEN FYSIIKAN KURSSILLA.)

ELI:

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3\vec{k} \rightarrow \int_0^k \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 4\pi k^2 dk$$

$$= \int_0^k \tilde{g}(k)dk \quad , \text{ JOSSA } \underline{\underline{\tilde{g}(k) \equiv \frac{L^3}{2\pi^2}k^2 = \frac{V}{2\pi^3}k^2}}$$

ON k-ARVOJEN <u>TILATIHEYS</u>.

VÄLILLÄ $(k, k+dk)$ SALLITTUJEN MOODIEN MÄÄRÄ dN_k ON SIIS

$$dN_k = \tilde{g}(k)dk \iff \boxed{\tilde{g}(k) = \frac{dN_k}{dk}}$$

MUTTA, MUTTA ... QM-VÄRÄHTELIJÄMME ENERGIA ON ANNETTU TAAJUUDEN ω FUNKTIONA, KUN TAAS $\tilde{g}(k)$ LIITTYY AALTOLUVUN k ARVOIHIN.

$\Rightarrow$ HALUAMME TIHEYDEN $g(\omega)$, JOLLE

$$\int_0^\infty g(\omega)\, d\omega = N_m \quad \text{MOODIEN LUKUMÄÄRÄ.}$$

TIETYLLÄ VÄLILLÄ $(k, k+dk)$ MOODIEN LUKUMÄÄRÄ ON

$$dN_m = \tilde{g}(k)\, dk \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g}(k) = \frac{dN_m}{dk}$$

SAMALLE MOODIMÄÄRÄLLE, MUTTA JOLLAIN TAAJUUSVÄLILLÄ $(\omega, \omega + d\omega)$

$$dN_m = g(\omega)\, d\omega .$$

YHDISTETÄÄN TULOKSET $\tilde{g}(k)\, dk = g(\omega)\, d\omega$

$$\Leftrightarrow \quad g(\omega) = \tilde{g}(k) \left(\frac{dk}{d\omega}\right)$$

DISPERSIORELAATIOSTA (T.S. MIKÄ ON ω:N RIIPPUVUUS k:STA — JA TOISIN PÄIN)

MEIDÄN TAPAUKSESSAMME SIIS

$$\boxed{g(\omega) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{dk}{d\omega}\right) k^2}$$

TÄSTÄ ETEENPÄIN TARVITAAN DISPERSIORELAATIO.

3. EINSTEININ MALLI

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty g(\omega) \langle E(\omega) \rangle d\omega \quad ; \quad \langle E(\omega) \rangle = \hbar\omega \left(n_B(\beta\hbar\omega) + \frac{1}{2} \right)$$

3N VÄRÄHTELIJÄÄ TAAJUUDELLA ω_E

MIKÄ ON NYT $g(\omega)$? $3N\delta(\omega - \omega_E)$!

DELTAFUNKTIO

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0 & \text{MUULLOIN} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = 3N\hbar\omega_E \left[n_B(\beta\hbar\omega_E) + \frac{1}{2} \right]$$

Huom!
HISTORIALLISESTI YLLÄ OLEVA LAUSEKE
OLI EINSTEININ LÄHTÖKOHTA. TÄSSÄ KUITENKIN
SEURAAMME YLEISTÄ MUOTOA, JOSTA EINSTEININ MALLI SEURAA
YLLÄ OLEVALLA TILATIHEYDELLÄ.

TIEDÄMME JO, ETTÄ TÄLLE MALLILLE

$$C \to 3Nk_B, \quad \text{KUN } T \to \infty \quad (\text{DULONG \& PETIT !})$$

JA

$$C \to 3Nk_B (\beta\hbar\omega)^2 e^{-\beta\hbar\omega}, \quad \text{KUN } T \to 0$$

MUTTA LASKETAAN VIELÄ YLEINEN LAUSEKE

$$C = \frac{\partial\langle E \rangle}{\partial T} = 3N\hbar\omega_E \left(\frac{\partial n_B}{\partial T} \right) = -3Nk_B\hbar\omega_E\beta^2 \left(\frac{\partial n_B}{\partial \beta} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 3Nk_B(\beta\hbar\omega_E)^2 \frac{e^{\beta\hbar\omega_E}}{(e^{\beta\hbar\omega_E} - 1)^2}}$$

HUOM! KUN $T \to 0$, VÄRÄHTELYN YKSI JA AINOA VAPAUSASTE
JÄÄTYY $\Rightarrow$ VÄRÄHTELIJÄT MENEVÄT PERUSTILAAN
"LIIAN NOPEASTI".

MALLISSA YKSI SOVITUSPARAMETRI ω_E $(\hbar\underline{\omega_E} = k_B\underline{T_E})$

4. DEBYEN MALLI

APPROKSIMAATIO : DISPERSIORELAATIO $\omega = v k$
(ALUSTAVA APPROKSIMAATIO)

OLETAMME TÄSSÄ, ETTÄ PITKITTÄISELLE (L) JA POIKITTAISILLE (T) POLARISAATIOILLE VAIHENOPEUS (TÄSSÄ ~ ÄÄNEN NOPEUS)

$$v_T = v_L = v$$

KÄSITTELY ON KUITENKIN HELPPO YLEISTÄÄ TAPAUKSEEN
$v_T \neq v_L$ (YRITÄ, NIIN NÄET!).

TARKASTELLAAN TÄSSÄ VAIN YHTÄ POLARISAATIOTA, JOLLOIN MAHDOLLISIA VÄRÄHTELYMOODEJA ON N (YHTEENSÄ SITTEN $3N$).

NYT SIIS $\left(\frac{dk}{d\omega}\right) = \frac{1}{v}$, $k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$

$$\Rightarrow \quad g(\omega) = \frac{V}{2\pi^2 v^3}\omega^2 \propto \omega^2$$

JOTTA MOODEJA TOSIAAN OLISI VAIN N, ASETAMME EHDON

$$\int_0^{\omega_D} g(\omega)\, d\omega = N,$$ JOSSA ω_D ON DEBYEN TAAJUUS.

INTEGRAALISTA $\frac{V\omega_D^3}{6\pi^2 v^3} = N \iff \omega_D^3 = \underbrace{\left(\frac{N}{V}\right)}_{n} 6\pi^2 v^3$

$$\iff \boxed{\omega_D = \left(6\pi^2 n v^3\right)^{1/3}}$$

TÄMÄ OLISI PERIAATTEESSA LASKETTAVISSA, MUTTA
1) n RIIPPUU LÄMPÖTILASTA
2) OLEMME OLETTANEET $v_T = v_L$, MIKÄ EI YLEISESTI PIDÄ PAIKKAANSA
[MUITAKIN SYITÄ LÖYTYY, PALATAAN NIIHIN MYÖHEMMIN]

$\Rightarrow$ ω_D (TAI T_D, KTS. ALLA) ON KÄYTÄNNÖSSÄ SOVITETTAVA PARAMETRI MALLISSA.

NYT VOIMME KIRJOITTAA $g(\omega) = \dfrac{3N\omega^2}{\omega_D^3}$

$$\Rightarrow \quad \langle E \rangle = 3 \int_0^{\omega_D} \frac{3N\omega^2}{\omega_D^3} \hbar\omega \left[n_B(\beta\hbar\omega) + \frac{1}{2} \right] d\omega$$

KAIKKI POLARISAATIOT TAAS MUKAAN!

$$= \frac{9N\hbar}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} d\omega + \left(\begin{array}{c} \text{LÄMPÖTILASTA} \\ \text{RIIPPUMATON} \\ \text{0-PISTETERMI} \end{array} \right)$$

LÄMPÖKAPASITEETTI

$$C = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} = -k_B \beta^2 \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} = \frac{9Nk_B(\hbar\beta)^2}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^4 e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} d\omega$$

TEHDÄÄN MUUTTUJANVAIHTO: $x = \beta\hbar\omega$

$x_{max} = \beta\hbar\omega_D$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{9Nk_B}{(\hbar\beta)^3 \omega_D^3} \int_0^{x_{max}} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

JA MÄÄRITELLÄÄN VIELÄ DEBYEN LÄMPÖTILA T_D, $\boxed{k_B T_D = \hbar\omega_D}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = 9Nk_B \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{x_{max}} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx}$$

INTEGRAALIN LASKU EI ONNISTU ANALYYTTISESTI, VAAN TARVITAAN NUMEERINEN LÄHESTYMISTAPA (ARVOT TAULUKOITU).

KATSOTAAN KUITENKIN, MITEN MALLI KÄYTTÄYTYY HYVIN MATALILLA/KORKEILLA LÄMPÖTILOILLA.

1°) $T \to \infty$ NYT JOKAISELLE MOODILLE

$$\langle E(\omega)\rangle \approx k_B T + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

$\Rightarrow$ KONTRIBUUTIO LÄMPÖKAPASITEETTIIN k_B

$$\Rightarrow \quad C = 3\int_0^{\omega_D} g(\omega)\,\frac{\partial\langle E(\omega)\rangle}{\partial T}\,d\omega = 3k_B\int_0^{\omega_D} g(\omega)\,d\omega$$

$$= 3Nk_B$$ KLASSINEN TULOS JÄLLEEN KERRAN!

2°) $T \to 0$ VAIN PIENEN ENERGIAN (MATALAN TAAJUUDEN) MOODIT VIRITTYVÄT JA KONTRIBUOIVAT C:HEN.

VOIMME APPROKSIMOIDA INTEGRAALISSA $\omega_D \to \infty$

NYT SIIS
$$\langle E\rangle \approx \frac{9N\hbar}{\omega_D^3(\hbar\beta^4)}\underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx}_{3!\,\zeta(4)\,=\,\frac{\pi^4}{15}}$$
(KTS. SIMON, KAPPALE 2.2.2)

JA
$$C = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} = \frac{12\pi^4}{5}Nk_B\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \propto T^3$$

SOPUSOINNUSSA MITTAUSTEN KANSSA ERISTEIDEN TAPAUKSESSA!

METALLEILLA HAVAITAAN YLIMÄÄRÄINEN LINEAARINEN KONTRIBUUTIO, KUN $T \sim 1-10$ K

$$C \sim \gamma T + \alpha T^3$$

1. DRUDEN MALLIN YLEINEN LIIKEYHTÄLÖ (KESKIMÄÄRÄISELLE LIIKEMÄÄRÄLLE)

KESKIMÄÄRÄINEN TÖRMÄYSAIKA τ (SIRONTA-AIKA),
TODENNÄKÖISYYS SIRONNALLE AIKAVÄLILLÄ dt: $\frac{dt}{\tau}$
(EI SIRONTAA, TODENNÄKÖISYYS $1-\frac{dt}{\tau}$)

KESKIMÄÄRÄINEN LIIKEMÄÄRÄ AJANHETKELLÄ $t+dt$:

$$\langle\vec{p}(t+dt)\rangle = \frac{dt}{\tau}\cdot\vec{0} + \left(1-\frac{dt}{\tau}\right)\cdot\left[\langle\vec{p}(t)\rangle + \langle d\vec{p}\rangle\right]$$

KESKIMÄÄRÄINEN LIIKEMÄÄRÄ SIRONNAN VAIKUTUKSESTA

LIIKEMÄÄRÄN MUUTOS AJASSA dt

$\langle d\vec{p}\rangle = \langle\vec{F}dt\rangle$

KUN ELEKTRONEIHIN VAIKUTTAVA VOIMA (~ ULKOISEN KENTÄN VAIKUTUS) ON VAKIO, VOIDAAN KIRJOITTAA $\langle\vec{F}dt\rangle = \vec{F}dt$

$$\Rightarrow \quad \langle\vec{p}(t+dt)\rangle = \langle\vec{p}(t)\rangle - \frac{dt}{\tau}\langle\vec{p}(t)\rangle + \vec{F}dt - \vec{F}\frac{(dt)^2}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\langle\vec{p}(t+dt)\rangle - \langle\vec{p}(t)\rangle}{dt} = \vec{F} - \frac{\langle\vec{p}(t)\rangle}{\tau} - \vec{F}\frac{dt}{\tau}$$

RAJALLA $dt \to 0$ YLLÄ OLEVA YHTÄLÖ SAADAAN MUOTOON

$$\frac{d\langle\vec{p}(t)\rangle}{dt} = \vec{F} - \frac{\langle\vec{p}(t)\rangle}{\tau}$$

VASTUSTERMI, "FRICTIONAL DAMPING"

---

1) AJASSA MUUTTUMATTOMASSA TILASSA ("STEADY-STATE")

$$\frac{d\langle\vec{p}(t)\rangle}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\vec{p}(t)\rangle = \vec{F}\tau$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle\vec{v}(t)\rangle = \frac{\tau}{m}\vec{F}$$

AJAUTUMISNOPEUS, $\vec{v}_{DRIFT}$

2) KUN $\vec{F}=0$ (EI KENTTÄÄ) AJANHETKELLÄ $t=0$

$$\langle\vec{p}(t)\rangle = \langle\vec{p}(0)\rangle e^{-\frac{t}{\tau}}$$

TASAPAINOTTUMINEN EKSPONENTIAALISESTI AJASSA

τ ~ RELAKSAATIOAIKA

HALLIN ILMIÖ →