3 YHTÄLÖN RATKAISUSTA

3.1 Bisektio

Väliarvolause jatkuville funktioille sanoo, että $f(x) = 0$ on olemassa, jos $x_1 < x < x_2$ s.e. $f(x_1)$:llä ja $f(x_2)$:lla on eri merkit.

Puolitusalgoritmi perustuu tarkasteluvälin puolittamiseen s.e. merkkiehto säilyy.

Huomaa, että käytännössä ongelma on löytää $[x_1, x_2]$.

Suppenemisnopeus : Kuinka nopeasti ratkaisu löytyy eli kuinka nopeasti virhe menee kohti nollaa?

Analyysi : Olkoon väli $[a, b]$. k:n askeleen jälkeen tarkasteluväli on $|b-a|/2^k$ ($\to 0$, kun $k \to \infty$). Keskitetään ratkaisu eli tarkastellaan väliä 2δ :

$$\frac{|b-a|}{2^k} \leq 2\delta \iff 2^{k+1} \geq \frac{|b-a|}{\delta}$$

$$\iff k \geq \log_2\left(\frac{|b-a|}{\delta}\right) - 1$$

Jokainen askel pienentää virhettä vakiotekijällä $\frac{1}{2}$.

Algoritmi on siis lineaarinen.

3.2 Newtonin iteraatio

Algoritmi 3.2.1 Olkoon alkuarvaus x_0. Iteraatio

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$ on Newtonin menetelmä.

Taylorin polynomi – kytkentä:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in [x_0, x]$$

Olkoon x_* nollakohta: $f(x_*) = 0$.

Sivuutetaan katkaisuvirhe ja merkitään $x_1 = x_*$:

$$0 = f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0)$$

Lause 3.2.2 Jos $C^2 \ni f$ ja alkuarvaus x_0 on riittävän hyvä ja lisäksi $f'(x_*) \neq 0$, niin Newtonin iteraatio suppenee nollakohtaan x_* asymptoottisesti kvadraattisella nopeudella.

Tod. (Kvadraattisuus)

Taylor: pisteessä x_k: $$x_* = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{(x_* - x_k)^2}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}$$

Lasketaan erotus $$x_{k+1} - x_* = \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)} (x_k - x_*)^2$$

Oletuksella: $\left| \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)} \right| \leq C$ väite seuraa.

Kirjassa: $C_* = | f''(x_*) / (2f'(x_*)) |$ s.e. $\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - x_*|}{|x_k - x_*|^2} = C_*$ ┘

3.3 Kvasi-Newton -menetelmät

Käytännössä derivaatan $f'(x_k)$ laskeminen voi olla vaikeaa tai kohtuuttoman kallista.

Newtonin iteraatiota muokataan approksimoimalla derivaattaa erotusosamäärällä:

Algoritmi 3.3.1 Sekanttimenetelmä

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Tarvitaan siis kaksi alkuarvausta iteraation käynnistämiseksi.

Suppenemisnopeus on $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.62.$

Newton: $f'(x_*) = 0$

$$x_{k+1} - x_* = \frac{f''(\xi_k)}{\underbrace{2f'(\xi_k)}_{\text{lähestyy nollaa, kun } x_k \to x_*}} (x_k - x_*)^2$$

Taylor:
$$f'(x_k) = \underbrace{f'(x_*)}_{=0 \text{ (oletus)}} + (x_k - x_*) f''(\eta_k)$$
$$= (x_k - x_*) f''(\eta_k)$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} - x_* = \frac{f''(\xi_k)}{2f''(\eta_k)} (x_k - x_*) \quad \text{lineaarinen!}$$

Esimerkki: $f(x) \equiv x^2 = 0 \qquad f'(x) = 2x$

Newton: $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k} = \frac{1}{2} x_k$

$$f(x) \equiv x^j = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = \frac{j-1}{j} x_k$$

Kiintopisteiteraatioista : $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

Tehtävällä $f(x) = 0$ on monia kiintopiste-esityksiä :

$$\varphi(x) \equiv x + f(x) = x$$
$$\varphi(x) \equiv x - f(x) = x$$

Toisaalta : $x = \varphi(x)$:lle

$$f(x) \equiv x - \varphi(x) = 0$$
$$f(x) \equiv \exp(x - \varphi(x)) - 1 = 0$$

Kaikille : $f(x) = 0$, jos ja vain jos $\varphi(x) = x$.

Esimerkki : Newton : $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Huomaa! $\varphi(x) = x$, jos $f(x) = 0$ (oletetaan $f'(x) \neq 0$)

Riittävä ehto suppenemiselle :

Lause Merkitään kiintopistettä x_*. Oletetaan, että $\varphi \in C^1$ ja $|\varphi'(x)| < 1$ välillä $[x_* - \delta, x_* + \delta]$. Jos alkuarvaus x_0 on tällä välillä, niin kiintopisteiteraatio suppenee.

Todistus Taylor :
$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = \varphi(x_*) + (x_k - x_*)\varphi'(\xi_k) = x_* + (x_k - x_*)\varphi'(\xi_k),$$
$\xi_k \in [x_k, x_*]$.

Vähennetään x_* puolittain ja merkitään $e_k = x_k - x_*$.

Saadaan : $e_{k+1} = e_k \varphi'(\xi_k) \Rightarrow |e_{k+1}| \leq |\varphi'(\xi_k)||e_k|$

$\square$

Vahvempi tulos: Kiintopisteiteraatio suppenee, jos φ on kontraktio, eli on olemassa vakio $L<1$ s.e. kaikille x, y pätee

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x-y|.$$

<u>Lause</u> Olkoon φ kontraktio koko reaaliakselilla. Tällöin kiintopiste x_* on yksikäsitteinen ja kiintopisteiteraatio suppenee mv. alkuarvauksella x_0.

<u>Todistus</u> Näytetään, että jono $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ on Cauchyn jono.

Olkoon $k > j$: $|x_k - x_j| \leq |x_k - x_{k-1}| + |x_{k-1} - x_{k-2}| + \dots + |x_{j+1} - x_j|$

$$|x_m - x_{m-1}| = |\varphi(x_{m-1}) - \varphi(x_{m-2})| \leq L|x_{m-1} - x_{m-2}| \leq L^{m-1}|x_1 - x_0|$$

$$\Rightarrow |x_k - x_j| \leq L^j \frac{1 - L^{k-j}}{1-L} |x_1 - x_0|$$

Jos $k > N$, $j > N$, niin $|x_k - x_j| \leq L^N \frac{1}{1-L}|x_1 - x_0| \xrightarrow{N\to\infty} 0$ (Cauchy!)

Kiintopisteen olemassaolo seuraa kontraktion jatkuvuudesta. Sen yksikäsitteisyys taasen osoitetaan vastaoletuksella:

$$\underbrace{|x_* - y_*|}_{\text{Kahden kiintopisteen erotus}} = |\varphi(x_*) - \varphi(y_*)| \leq L|x_* - y_*|$$

RR, $L < 1$ ellei $x_* = y_*$.

$\square$