4 INTERPOLAATIO (POLYNOMI-INTERPOLAATIO)

4.1 Lagrangen interpolaatio

Idea: Approksimoidaan funktiota $f(x)$ välillä $x \in [a, b]$ polynomilla $p(x)$ s.e. datapisteissä (x_i, y_i), $i = 0, 1, \dots, n$, approksimaatio on tarkka: $y_i = p(x_i)$.

Esimerkki 4.1.1 $(1,2), (2,3), (3,6)$ $\left((x_i, y_i), i = 0, 1, 2 \right)$

Mahdollinen väli: $[1,3]$; $P_2(x) = \sum_{j=0}^{2} c_j x^j$

2. asteen polynomi $\Leftrightarrow$ kolme tuntematonta kerrointa

$\Rightarrow$ kolme pistettä määrittää 2. asteen polynomin tarkasti

Matriisimuodossa (Vandermonde):

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{eli} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_0 = 3, \quad c_1 = -2, \quad c_2 = 1 \quad ; \quad P_2(x) = x^2 - 2x + 3$$

Menetelmä on valitettavasti erittäin häiriöaltis.

Yhtälöryhmän ratkaisun kompleksisuus: $\mathcal{O}(n^3)$

Idea: Korvataan kanta x^j "paremmalla."

Paras mahdollinen tilanne:

$$p(x) = \sum y_i \varphi_i(x), \quad \text{kun} \begin{cases} \varphi_i(x_i) = 1, \\ \varphi_i(x_j) = 0, \quad i \neq j. \end{cases}$$

Osoittautuu, että $\varphi_i(x)$:t on helppo konstruoida.

Määritelmä 4.1.2 Lagrangen kantapolynomi

$$\varphi_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad ; \quad p(x) = \sum y_i \varphi_i(x) \text{ on}$$

ns. Lagrangen muoto.

Esimerkki 4.1.3

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} \\ \varphi_1(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} \\ \varphi_2(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \end{cases} ; \quad \begin{aligned} p(x) &= 2\cdot\varphi_0(x) + 3\cdot\varphi_1(x) + 6\cdot\varphi_2(x) \\ &= x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

Laskennallinen vaativuus (kompleksisuus) : $\Theta(n^2)$

Sivuaskel : Polynomin evaluointi kannassa x^j on lineaarinen : $\Theta(n)$

Horner : $y = c_n$; $y = yx + c_{n-1}$; ...

n askelta $\Rightarrow y = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$

Toinen sivuaskel : Lause 4.1.4 Interpolaatiopolynomi $p_n(x)$ on yksikäsitteinen.

Todistuksen idea : $p_n(x)$:llä on n nollakohtaa.

Olkoot $p_n(x)$ ja $q_n(x)$ kaksi interpolaatiopolynomia.

$(p_n(x_i) - q_n(x_i)) = 0$, $\underbrace{i = 0, 1, \ldots, n}_{n+1 \text{ nollakohtaa}}$.

Erotus : $p_n(x) - q_n(x) = 0$

Takaisin asiaan :

Lagrangen muoto voidaan kirjoittaa tehokkaampaan, ns. barysentriseen muotoon, missä evaluointi saadaan nopeaksi.

Määritellään uudet kantapolynomit : $\hat{\varphi}_i(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) / (x - x_i)$

Merkitään $\varphi(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$, jolloin

$$p(x) = \varphi(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i} y_i , \quad w_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} .$$

Saatu, ns. 1. barysentrinen muoto, vaatii painojen w_i muodostamiseen $\Theta(n^2)$, mutta evaluointiin vain $\Theta(n)$.

Havaitaan, että jos $y_i = 1$, niin $p_n(x) = 1$.

Pätee siis:

$$1 = \varphi(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i}, \quad \text{kaikilla } x.$$

Määritelmä 4.1.5 Barysentrinen interpolaatiokaava

$$p(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i} y_i \right) \Big/ \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{w_i}{x - x_i} \right)$$

Esimerkki 4.1.6 $y_0 = 2, \ y_1 = 3, \ y_2 = 6$

$$w_0 = \frac{1}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}, \quad w_1 = \frac{1}{(2-1)(2-3)} = -1,$$

$$w_2 = \frac{1}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}$$

$$p(x) = \left(\frac{2}{2(x-1)} - \frac{3}{x-2} + \frac{6}{2(x-3)} \right) \Big/ \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2(x-3)} \right)$$

Saadaanko sama tulos?

$$p(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right) \Big/ \left(\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right)$$

$$= x^2 - 2x + 3$$

Hurraa!