4.2 Newtonin interpolaatio

Luonnollisen kannan laajennus on joukko $1, x - x_0, (x-x_0)(x-x_1), \ldots, \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j)$.

Määritelmä 4.2.1

Newtonin interpolaatiopolynomi:

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j),$$

missä a_i on valittu s.e. interpolaatioehto toteutuu kaikissa x_i.

Konstruktio vastaa alakolmiosysteemin ratkaisua: $O(n^2)$

$$p(x_0) = a_0 = y_0$$
$$p(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0}$$

...

Siis:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & x_1 - x_0 & & & \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2-x_0)(x_2-x_1) & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & x_n - x_0 & \cdots & & \prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Kaksi havaintoa:

a) pisteiden järjestyksellä ei ole väliä (eri stabiilisuus eri permutaatioilla)

b) uuden pisteen lisääminen ei vaikuta jo laskettuihin kertoimiin

Edellä nähdyssä barysentrisessä interpolaatiossa painot w_i voi myös päivittää inkrementaalisesti.

Esimerkki 4.2.2 $\quad p(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2)$

Systeemi:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

$$p(x) = x^2 - 2x + 3$$

Potentiaalinen ongelma: Suurissa systeemeissä yli- ja alivuoto

Jaetut erotukset : Parempi algoritmi kertoimille a_i

Notaatio : $y_i = f(x_i) = f_i$; interpolaatiopolynomi $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Havaitaan, että a_k on sama kuin Newtonin interpolaatiopolynomina.

Määritelmä 4.2.3 Jaettu erotus kertaluku a k

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = a_k$$

Lause 4.2.4 Pätee :

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Rekursio päättyy, koska $f[x_i] = y_i = f_i$.

Esimerkki 4.2.5

$f[x_0] = 2$

$f[x_1] = 3 \qquad f[x_0, x_1] = \dfrac{3-2}{2-1} = 1$

$f[x_2] = 6 \qquad f[x_1, x_2] = \dfrac{6-3}{3-2} = 3 \qquad f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{3-1}{3-1} = 1$

On saatu täsmälleen samat kertoimet a_k !

Divided Differences

Let us consider the interpolating polynomial in the natural basis:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Notice, that a_k are exactly the coefficients of the Newton interpolation polynomial.

Definition k^{th}-order divided difference $f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] = a_k$ where a_k is the coefficient of the term x^k in the polynomial of degree k that interpolates the points x_i.

Why is this a sensible definition?

One data point: $f[x_j] = f_j = y_j$ (correct!)

Two data points:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f_j - f_i}{x_j - x_i} = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}$$

Interpolating polynomial of two points is simply a straight line:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad \Rightarrow f[x_i, x_j] \text{ is correct!}$$

Three data points:

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{x_k - x_i}$$

Theorem

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Proof

Three interpolating polynomials:
- p of degree k ; $(x_0, f_0), \dots, (x_k, f_k)$
- q of degree $k-1$; $(x_0, f_0), \dots, (x_{k-1}, f_{k-1})$
- r of degree $k-1$; $(x_1, f_1), \dots, (x_k, f_k)$

Claim:

$$p(x) = q(x) + \frac{x - x_0}{x_k - x_0}(r(x) - q(x))$$

x_0 : $p(x_0) = q(x_0) = f_0$

$x_1, \dots, x_{k-1}$: $p(x_i) = q(x_i) = r(x_i) = f_i$, $i = 1, \dots, k-1$

x_k : $p(x_k) = r(x_k) = f_k$; RHS : $q(x_k) + 1 \cdot (r(x_k) - q(x_k)) = r(x_k)$

$\square$

4.3 Interpolaatiovirhe : $R(x) = f(x) - p(x)$

Oletetaan, että f on $(n+1)$ kertaa derivoituva.

Olkoon x' jokin pisteistä x_i eroava piste.

Muodostetaan apufunktio : $h(x) = f(x) - p(x) - c\,w(x)$,

missä $w(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$ ja $c = \dfrac{f(x') - p(x')}{w(x')}$.

Funktion $h(x)$ nollakohdat ovat pisteet $\underbrace{x_0, \ldots, x_n}_{n+1}$ ja x'.

Niitä on siis ainakin $n+2$ kpl.

Rollen lausetta toistamalla päädytään siihen, että derivaatalla $h^{(n+1)}$ on ainakin yksi nollakohta ; merkitään ξ :

$$h^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - p^{(n+1)}(x) - c\,w^{(n+1)}(x)$$

$$= f^{(n+1)}(x) - c\,(n+1)!$$

$$\Rightarrow h^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - c\,(n+1)! = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Pisteessä x' : $R(x') = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x' - x_j)$.

<u>Lause 4.3.1</u> $\quad R(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$, missä $\xi = \xi(x)$.

Huomaa, että $h(x)$:n määritelmän nojalla vakio c on korkeimman x:n potenssin kerroin. Tämä on edellisen nojalla eräs jaettu erotus :

$$f[x_0, \ldots, x_n, x] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)).$$