4.3 Interpolaatiovirhe : $R(x) = f(x) - p(x)$

Oletetaan, että f on $(n+1)$ kertaa derivoituva.

Olkoon x' jokin pisteistä x_i eroava piste.

Muodostetaan apufunktio : $h(x) = f(x) - p(x) - c\,w(x)$,

missä $w(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$ ja $c = \dfrac{f(x') - p(x')}{w(x')}$.

Funktion $h(x)$ nollakohdat ovat pisteet $\underbrace{x_0, \dots, x_n}_{n+1}$ ja x'.

Niitä on siis ainakin $n+2$ kpl.

Rollen lausetta toistamalla päädytään siihen, että derivaatalla $h^{(n+1)}$ on ainakin yksi nollakohta ; merkitään ξ :

$$h^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - p^{(n+1)}(x) - c\,w^{(n+1)}(x)$$

$$= f^{(n+1)}(x) - c(n+1)!$$

$$\Rightarrow h^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)! = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Pisteessä x' : $R(x') = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x' - x_j)$.

<u>Lause 4.3.1</u> $R(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$, missä $\xi = \xi(x)$.

Huomaa, että $h(x)$:n määritelmän nojalla vakio c on korkeimman x:n potenssin kerroin. Tämä on edellisen nojalla eräs jaettu erotus :

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi(x)).$$

4.4 Paloittainen polynomiapproksimaatio

Idea: Jaetaan väli $[a,b]$ osaväleihin pituudeltaan $h = \frac{b-a}{n}$, missä n on välien lkm.
Jokainen osaväli approksimoidaan erikseen alhaisen asteen polynomilla.

Lineaarinen paloittainen interpolaatiopolynomi (interpolantti):

$$l(x) = f(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad x \in [x_i, x_{i-1}].$$

Interpolaatiovirhe: $f(x) - l(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_{i-1})(x - x_i)$

Olet: $|f''(x)| \leq M$: $|f(x) - l(x)| \leq M \frac{h^2}{8}$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$

Jos derivaatta on rajoitettu yli koko välin $[a,b]$ virhe on sama.

Hermiten interpolaatio: Vaaditaan derivaatta jatkuvaksi.

Olkoon $p(x)$ kolmannen asteen polynomi. Sen derivaatta $p'(x)$ on kvadraattinen:

$$p'(x) = f'(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f'(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \alpha (x - x_{i-1})(x - x_i)$$

Pätee: $p'(x_i) = f'(x_i)$. α on parametri, joka on sovitettava dataan: Integroidaan (integraalien yläraja: x)

$$p(x) = -\frac{f'(x_{i-1})}{h} \int_{x_{i-1}}^{x} (t - x_i)\,dt + \frac{f'(x_i)}{h} \int_{x_{i-1}}^{x} (t - x_{i-1})\,dt$$

$$+ \alpha \int_{x_{i-1}}^{x} (t - x_{i-1})(t - x_i)\,dt + C$$

Välittömästi: $p(x_{i-1}) = f(x_{i-1}) \Rightarrow C = f(x_{i-1})$

vastaavasti: $p(x_i) = f(x_i) \Rightarrow \alpha = \frac{3}{h^2}(f'(x_{i-1}) + f'(x_i)) + \frac{6}{h^3}(f(x_{i-1}) - f(x_i))$

Splinit: Jos luovumme vaatimuksesta derivaatan sovituksesta, voimme konstruoida kolmannen asteen palapolynomin, jolla on kaksi jatkuvaa derivaattaa pisteissä x_i : $S(x)$.

Ongelma: Kertoimien valinta edellyttää globaalin ongelman ratkaisua. Jokaiselle välille saadaan oma splini: $S_i(x)$.

Konstruktio: Oletetaan aluksi, että $z_i = s''(x_i)$, $i = 1, \dots, n-1$, tunnetaan. Lisäksi $h = x_i - x_{i-1}$ (= vakio).

Väli: $[x_{i-1}, x_i]$: Pätee: $s_i''(x) = \frac{1}{h} z_{i-1}(x_i - x) + \frac{1}{h} z_i (x - x_{i-1})$

Integroidaan kahdesti:

$$s_i(x) = \frac{1}{h} z_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6} + \frac{1}{h} z_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6} + C_i(x - x_{i-1}) + D_i$$

Interpolaatioehto kiinnittää vakiot C_i, D_i:

$$D_i = f_{i-1} - \frac{h^2}{6} z_{i-1}$$

$$C_i = \frac{1}{h}\left[f_i - f_{i-1} + \frac{h^2}{6}(z_{i-1} - z_i)\right]$$

On siis saatu kaava splinin evaluointiin yli jokaisen osavälin. Mutta, z_i on ratkaistava ja reunaehdot (z_0 ja z_n) asetettava.

Lasketaan $s(x)$:n derivaatta ja käytetään jatkuvuutta:

$$s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i):$$

$$\frac{h}{2} z_i + \frac{1}{h}(f_i - f_{i-1}) + \frac{h^2}{6}(z_{i-1} - z_i) =$$

$$-\frac{h}{2} z_i + \frac{1}{h}(f_{i+1} - f_i) + \frac{h^2}{6}(z_i - z_{i+1}),$$

$i = 1, \dots, n-1$,

mikä on tridiagonaalisysteemi:

$$\frac{2h}{3} z_i + \frac{h}{6} z_{i-1} + \frac{h}{6} z_{i+1} = -\frac{2}{h} f_i + \frac{1}{h} f_{i-1} + \frac{1}{h} f_{i+1}$$

$$= \frac{1}{h}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1})$$

$$= b_i$$

z_0 ja z_n viedään oikealle puolelle, jolloin

$$b_1 = \frac{1}{h}(f_2 - 2f_1 + f_0) - \frac{h}{6} z_0 ,$$

$$b_{n-1} = \frac{1}{h}(f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}) - \frac{h}{6} z_n .$$

Ns. luonnollinen splini saadaan valinnoilla $z_0 = z_n = 0$.

Muita valintoja: z_0 ja z_n valitaan s.e.

a) splinin ensimmäinen derivaatta päätepisteissä on tarkka;

b) kolmas derivaatta on jatkuva pisteissä x_1 ja x_{n-1}, tämä on engl. not-a-knot-ehto.