6.3. Gaussin kvadratuuri

Idea: Valitaan pisteet ja painot yhtäaikaisesti.

Ongelma: $n = 1$: $\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$

Kuten edellä:

$$\int_a^b 1\,dx = b-a \quad \Rightarrow \quad A_0 + A_1 = b-a$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2) \Rightarrow A_0 x_0 + A_1 x_1 = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3-a^3) \Rightarrow A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$\vdots$$

Saadaan epälineaarinen yhtälöryhmä!

Ratkaisu: Ortogonaalipolynomit

Määritelmä 6.3.1 Kaksi polynomia ovat keskenään ortogonaalisia yli välin $[a,b]$, jos niiden sisätulo on nolla.

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)\,q(x)\,dx = 0$$

Ortonormaaleille $\langle p,p \rangle = \langle q,q \rangle = 1$.

Gram-Schmidt: $\{1, x, x^2, \dots\} \longrightarrow \underbrace{\{q_0, q_1, q_2, \dots\}}_{\text{ortonormaaleja}}$

$$q_0 = 1 \Big/ \left[\int_a^b 1^2 dx\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

Huom! $\|q(x)\| \equiv \left[\int_a^b (q(x))^2 dx\right]^{1/2}$

For $j = 1, 2, \dots$

$$\tilde{q}_j(x) = x\,q_{j-1}(x) - \sum_{i=0}^{j-1} \langle x q_{j-1}(x), q_i(x) \rangle\, q_i(x)$$

$$q_j(x) = \tilde{q}_j(x) \,/\, \|\tilde{q}_j(x)\|$$

Havainto: $q_{j-1}(x)$ on ortogonaalinen kaikille polynomeille astetta $j-2$ tai alempi.

$$\langle x q_{j-1}(x), q_i(x) \rangle = \langle q_{j-1}(x), x q_i(x) \rangle = 0, \quad i \leq j-3$$

$$\Rightarrow \tilde{q}_j(x) = x q_{j-1}(x) - \langle x q_{j-1}(x), q_{j-1}(x) \rangle q_{j-1}(x) - \langle x q_{j-1}(x), q_{j-2}(x) \rangle q_{j-2}(x)$$

Saadaan siis kolmen termin rekursio!

Kvadratuuripisteet ovat ortogonaalipolynomien nollakohtia:

<u>Lause 6.3.2</u> Olkoot $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ortogonaali-polynomin $q_{n+1}(x)$ nollakohdat välillä $[a,b]$.

Tällöin
$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i),$$

missä
$$A_i = \int_a^b \varphi_i(x)\,dx, \quad \varphi_i(x) \equiv \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

on tarkka kaikille polynomeille astetta $2n+1$ (tai alempi).

Todistus

Olkoon f polynomi enintään astetta $2n+1$.
Kun f jaetaan q_{n+1}:llä, on jakojäännös enintään astetta n. Jakoalgoritmi:

$$f = q_{n+1} p_n + r_n \quad \text{ja} \quad f(x_i) = r_n(x_i),$$
$$q_{n+1}(x_i) = 0.$$

Integroidaan:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b q_{n+1}(x)\, p_n(x)\,dx}_{\langle q_{n+1}(x),\, p_n(x)\rangle = 0} + \int_a^b r_n(x)$$
$$= \int_a^b r_n(x)\,dx$$
$$= \sum_{i=0}^{n} A_i r_n(x_i) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i). \qquad \square$$

Määritelmä 6.3.3 Painotetut ortogonaalipolynomit

Määritellään sisätulo $\langle p, q\rangle_w = \int_a^b p(x) q(x) w(x)\,dx$,
missä $w(x)$ on positiivinen painofunktio.

Lause 6.3.4 Korvaa L6.3.2:ssa : q_{n+1} w-ortogonaalinen

$$\int_a^b f(x) w(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i),$$

$$A_i = \int_a^b \varphi_i(x) w(x)\,dx.$$

Jälleen tarkkaa polynomeille astetta $2n+1$ (tai alempi).

Esimerkki 6.3.5 Gaussin kvadratuuri : $x \in [-1,1]$, $n=1$

Nollakohdet eivät edellytä ortogonalisointia.

Kanta : $\{1, x, x^2\}$

Gram-Schmidt : $\tilde{q}_0 = 1$

$$\tilde{q}_1 = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx} \cdot 1 = x$$

$$\tilde{q}_2 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle} x = x^2 - \frac{1}{3}$$

$\tilde{q}_2$:n juuret : $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

Kaava on siis : $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq A_0 f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + A_1 f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Tarkka aina x^3:een saakka!