7 ALKUARVOTEHTÄVÄN NUMEERINEN RATKAISU

Yleinen tehtävä:
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \geq t_0, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Oletetaan ratkaisun olemassaolo- ja yksikäsitteisyystarkastelu tutuksi. Erityisesti oletetaan funktio f jatkuvaksi ja y:n suhteen Lipschitz-jatkuvaksi: kaikille y_1, y_2, $t \in [a,b]$,

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq L\,|y_2 - y_1|,$$

missä luku L on eräs vakio, $t_0 \in [a,b]$.

Numeerinen ratkaisu approksimoi alkuehdon määräämää ratkaisukäyrää. Tavalliset menetelmät approksimoivat ratkaisua hetkellä t_{k+1} käyttäen ratkaisua hetkellä t_k. Moniaskelmenetelmät käyttävät syvempiä riippuvuuksia.

7.1 Eulerin menetelmä

Vakiomittainen askel h; $y_0 = y(t_0)$:

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Pisteestä toiseen kuljetaan tangentin suuntaan ratkaisukäyrälle.

Menetelmä seuraa suoraan Taylorin kaavasta:

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) &= y(t_k) + h y'(t_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k) \\ &= y(t_k) + h f(t_k, y(t_k)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k), \end{aligned}$$

$$\xi_k \in [t_k, t_{k+1}].$$

Virhelajit: Katkaisuvirhe (lokaali) ja globaali virhe

Nyt $\dfrac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(t_k, y_k)$, sijoitetaan ratkaisu $y(t_k)$

eli $$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = f(t_k, y(t_k)) + \underbrace{\frac{h}{2} y''(\xi_k)}_{\text{lokaali virhe } O(h)}$$

Eulerin menetelmä on 1. kertalukua.

Huomaa: Usein katkaisuvirhe ajatellaan muotoon $O(h^2)$. Tässä ajatellaan approksimaatiota, jossa vasemmalla puolella on derivaatan approksimaatio.

Menetelmä on konsistentti: $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = y'(t_k) = f(t_k, y(t_k))$

Katkaisuvirhe $\xrightarrow{h\to 0} 0$

Entä globaali virhe? Hetkellä t_k: $|y(t_k) - y_k| \leq ?$

Konvergentti menetelmä: $\max |y(t_k) - y_k| \xrightarrow{h\to 0} 0$

<u>Lause 7.1.1</u> Oletetaan yleinen tehtävä hyvin asetetuksi. Olkoon $T \in [a,b]$, $T > t_0$ ja $h = (T - t_0)/N$. Olkoon

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_k, y_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Oletetaan, että $y_0 \to y(t_0)$, kun $h \to 0$. Tällöin kaikille k s.e. $t_k \in [t_0, T]$, $y_k \to y(t_k)$, kun $h \to 0$ ja

$$\max_k |y(t_k) - y_k| \to 0.$$

Todistus Merkitään: $d_j = y(t_j) - y_j$.

Vähennetään Taylor ja Euler:

$$d_{k+1} = d_k + h[f(t_k, y(t_k)) - f(t_k, y_k)] + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k)$$

Lipschitz ja $|y''(t_k)| \leq M$:

$$|d_{k+1}| \leq |d_k| + hL|d_k| + \frac{h^2}{2}M$$

$$= (1 + hL)|d_k| + \frac{h^2}{2}M$$

Yleisesti pätee: $\gamma_{k+1} \leq (1+\alpha)\gamma_k + \beta$, $k = 0, 1, \ldots$

$\alpha > 0$, $\beta \geq 0$

$$\Longrightarrow \quad \gamma_n \leq e^{n\alpha} y_0 + \frac{e^{n\alpha} - 1}{\alpha}\beta$$

eli $$|d_{k+1}| \leq e^{(k+1)hL}|d_0| + \frac{e^{(k+1)hL} - 1}{L}\frac{h}{2}M$$

$kh \leq T - t_0$:

$$\max_k |d_k| \leq e^{L(T-t_0)}\underbrace{|d_0|}_{\to 0} + \frac{e^{L(T-t_0)} - 1}{L}\underbrace{\frac{h}{2}M}_{\to 0}$$

(kun $h \to 0$)

□

Eulerin menetelmälle saadaan siis globaali virhe $O(h)$.

Samalla tekniikalla voi tarkastella pyöristysvirheen vaikutusta.

Lasketaan liukulukuratkaisun ja tarkan aritmetiikan erotus: (vastaavin merkinnöin)

$$|d_{k+1}| \leq (1 + hL)|d_k| + \delta$$

$$\Rightarrow |d_{k+1}| \leq e^{L(T-t_0)}\underbrace{|d_0|}_{\text{virhe alussa}} + \underbrace{\frac{e^{L(T-t_0)} - 1}{hL}\delta}_{\text{dominoi pienillä } h\text{:n arvoilla}}$$

Ohje: Minimoi globaali virhe unohtamatta pyöristystä!

Eksplisiittinen vs implisiittinen menetelmä :

Kvadratuuri :

$$y(t+h) = y(t) + \underbrace{\int_t^{t+h} f(s, y(s))\,ds}_{= \frac{h}{2}\left[f(t, y(t)) + f(t+h, y(t+h))\right] + O(h^3)}$$

antaa trapetsin :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_{k+1})\right]$$

Menetelmä on implisiittinen, y_{k+1} on ratkaistava joka askeleella jollain yhtälön ratkaisumenettelyllä. Eulerin menetelmä on eksplisiittinen y_{k+1} saadaan summeeraamalla; y_{k+1} on vain toisella puolella yhtälöä.

Idea: Ennustetaan ja korjataan

Heunin menetelmä :

$$\tilde{y}_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \quad ; \quad \text{ennustus}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, \tilde{y}_{k+1})\right] \quad ; \quad \text{korjaus}$$

Formaalisti : 2. kertaluvun Runge-Kutta

$$\tilde{y}_{k+\alpha} = y_k + \alpha h f(t_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + \beta h f(t_k, y_k) + \gamma h f(t_k + \alpha h, \tilde{y}_{k+\alpha})$$

Kolme parametria : α, β, γ $\Rightarrow$ Sovitetaan Taylorin kehitelmään !

Heun: $\alpha = 1, \; \beta = \gamma = \frac{1}{2}$

Yleisesti : $\beta + \gamma = 1, \quad \alpha\gamma = \frac{1}{2}$

Kaikille tällaisille menetelmille katkaisuvirhe on $O(h^2)$.

7.2 <u>Synteesi</u> : $y_{k+1} = y_k + h\,\psi(t_k, y_k, h)$

a) konsistenssi :

$$\lim_{h\to 0} \psi(t, y, h) = f(t, y)$$

b) stabiilisuus : Jos on olemassa vakio K ja askelpituus $h_0 > 0$ s.e.

$$|y_n - \tilde{y}_n| \leq K\,|y_0 - \tilde{y}_0|,$$

missä $y_n, \tilde{y}_n$ ovat ratkaisuja ja $y_0, \tilde{y}_0$ alkuarvoja, pätee kun $h \leq h_0$ ja $nh \leq T - t_0$, niin menetelmä on stabiili.

c) a) & b) $\Rightarrow$ menetelmä on konvergentti

Jos katkaisuvirhe on muotoa

$$\tau(t, h) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \psi(t, y(t), h),$$

niin stabiili menetelmä, jonka katkaisuvirhe on $\mathcal{O}(h^p)$, on globaalilta virheeltään luokkaa $\mathcal{O}(h^p)$.

Huomaa! Todistus on vastaava kuin Eulerin menetelmälle.

$$\gamma_{k+1} \leq (1+\alpha)\gamma_k + \beta \quad \Rightarrow \quad \gamma_n \leq e^{n\alpha}\gamma_0 + \frac{e^{n\alpha} - 1}{\alpha}\beta \qquad ?$$

$$\gamma_n \leq (1+\alpha)^2 \gamma_{n-2} + [(1+\alpha) + 1]\beta$$

$$\leq (1+\alpha)^n \gamma_0 + \underbrace{\left[\sum_{j=0}^{n-1} (1+\alpha)^j\right]}_{= \frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha}}\beta$$

$$(1+\alpha) \leq e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2} e^{\xi}, \quad \xi \in (0, \alpha)$$

<u>Euler systeemeille:</u>

$$\underline{y}' = \underline{f}(t, \underline{y}), \quad \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{y}_{k+1} = \underline{y}_k + h\underline{f}(t_k, \underline{y}_k)$$

eli komponenteittain: $y_{i,k+1} = y_{ik} + h f_i(t_k, y_{1k}, \ldots, y_{nk}),\ i = 1, \ldots, n$