7.3 Moniaskelmenetelmät

Tarkastellaan (jälleen) integraalia

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y(s))\, ds .$$

Idea: Korvataan $f(t, y)$ sopivalla interpolaatiopolynomilla, joka ottaa ratkaisuhistorian huomioon.

Jos t_{k+1} on mukana, on menetelmä implisiittinen.

Adams - Bashforth : Eksplisiittinen

Interpoloidaan pisteissä $t_k, t_{k-1}, \ldots, t_{k-m+1}$; $p_{m-1}(s)$

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p_{m-1}(s)\, ds = y_k + h \sum_{l=0}^{m-1} b_l f(t_{k-l}, y_{k-l}),$$

missä
$$b_l = \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq l}}^{m-1} \frac{s - t_{k-j}}{t_{k-l} - t_{k-j}} \right) ds .$$

Jos $m = 1$, saadaan Eulerin menetelmä!

Luentotehtävä : Millainen menetelmä saadaan, kun $m=2$?

$$y_{k+1} = y_k + h \left[\frac{3}{2} f(t_k, y_k) - \frac{1}{2} f(t_{k-1}, y_{k-1}) \right]$$

Katkaisuvirhe on $O(h^m)$. (Integraalin virhe $O(h^{m+1})$.)

Adams-Moulton : Implisiittinen

Otetaan piste t_{k+1} mukaan; $q_m(s)$.

$$y_{k+1} = y_k + h\sum_{l=0}^{m} c_l f(t_{k+1-l}, y_{k+1-l}),$$

missä

$$c_l = \frac{1}{h}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{m} \frac{s-t_{k+1-j}}{t_{k+1-l}-t_{k+1-j}} \right) ds.$$

Jos $m=0$, saadaan $y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$

eli ns. implisiittinen Eulerin menetelmä.

Luentotehtävä: Millainen menetelmä saadaan, kun $m=1$?

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(t_{k+1}, y_{k+1}) + f(t_k, y_k)\right]$$

eli trapetsi!

Katkaisuvirhe on $\mathcal{O}(h^{m+1})$.

Yleinen muoto: $\sum_{l=0}^{m} a_l y_{k+l} = h\sum_{l=0}^{m} b_l f(t_{k+l}, y_{k+l})$,

$a_m = 1$; $b_m = 0$ $\Rightarrow$ eksplisiittinen, muutoin implisiittinen.

Korkea katkaisuvirheen kertaluku ei implikoi stabiilisuutta!

$$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = h\left[\frac{13}{12}f(t_{k+2}, y_{k+2}) - \frac{5}{3}f(t_{k+1}, y_{k+1}) - \frac{5}{12}f(t_k, y_k)\right]$$

Tehtävä: $y'=0$, $y(0)=1$

$y_1 = 1+\delta$

$y_2 = 3y_1 - 2y_0 = 1+3\delta$

$\ldots$

$y_k = 3y_{k-1} - 2y_{k-2} = 1 + (2^k-1)\delta$

$\delta \sim 2^{-53}$

$\Rightarrow k = 100$ antaa virheen $\sim 2^{47}$ (!)

8 Kankeat differentiaaliyhtälöt

Ongelma: Ratkaisu sisältää erilaisia aikaskaaloja.

Mallitehtävä:

$$\begin{cases} y_1' = -100 y_1 + y_2 \\ y_2' = \qquad\qquad -\frac{1}{10} y_2 \end{cases} \iff y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} -100 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Ratkaisu:

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{-100t}\left(y_1(0) - \frac{10}{999} y_2(0)\right) + e^{-\frac{t}{10}} \frac{10}{999} y_2(0) \\ y_2(t) = e^{-t/10} y_2(0) \end{cases}$$

Kysymys: Voiko tehtävän ratkaista Eulerin menetelmällä?
Voiko askelpituuden valita vapaasti?
(Kaikki on kunnossa, jos $h \to 0$.)

Komponentti 2: $y_{2,k+1} = \left(1 - \frac{h}{10}\right) y_{2,k}$

$$\Rightarrow \quad y_{2,k} = \left(1 - \frac{h}{10}\right)^k y_2(0)$$

Komponentti 1: $y_{1,k+1} = (1 - 100h) y_{1,k} + h y_{2,k}$

$$= (1 - 100h) y_{1,k} + h\left(1 - \frac{h}{10}\right)^k y_2(0)$$

$$= (1 - 100h)^2 y_{1,k-1} + h\left[(1-100h)\left(1 - \frac{h}{10}\right)^{k-1} + \left(1 - \frac{h}{10}\right)^k\right] y_2(0)$$

$$\dots$$

$$= (1 - 100h)^{k+1} y_1(0) + h\left(1 - \frac{h}{10}\right)^k \left[\sum_{l=0}^{k} \left(\frac{1 - 100h}{1 - \frac{h}{10}}\right)^l\right] y_2(0)$$

mistä lopulta:

$$y_{1,k+1} = (1 - 100h)^{k+1}\left[y_1(0) - \frac{10}{999} y_2(0)\right] + \left(1 - \frac{h}{10}\right)^{k+1} \frac{10}{999} y_2(0)$$

Nähdään välittömästi, että jos $h > \frac{1}{50}$, niin $|1 - 100h| > 1$ ja $(1-100h)^{k+1}$ kasvaa geometrisesti. Vaikka alkuehdot takaisivat, että $y_1(0) - \frac{10}{999} y_2(0) = 0$, niin pyöristysvirhe vahvistuu rajatta.

Tässä tapauksessa Eulerin menetelmä on epästabiili, kun $h > 1/50$.

8.1 Absoluuttinen stabiilisuus

Yleinen tehtävä: $y' = \lambda y \Rightarrow y = e^{\lambda t} y(0)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Tiedetään, että $y(t) \to 0$, kun $t \to \infty$ vain jos $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$.

Systeemi: $y' = Ay$; A $n \times n$-matriisi

Oletetaan, että A on diagonalisoituva

$$A = V \Lambda V^{-1},$$

missä Λ on ominaisarvojen muodostama lävistäjämatriisi ja V:n sarakkeet ovat ominaisvektorit.

Muuttujanvaihdolla $\tilde{y} = V^{-1} y$ saadaan

$$\tilde{y}' = \Lambda \tilde{y} \quad \text{eli} \quad \tilde{y}_i = \lambda_i \tilde{y}_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Muunnettu systeemi suppenee muutetussa koordinaatistossa, mikä ei aina ole yksinkertaista tulkita.

Mutta, seuraava määritelmä on joka tapauksessa mielekäs:

<u>Määritelmä 8.1.1</u> Absoluuttisen stabiilisuuden alue on joukko $\{ h\lambda \in \mathbb{C} \mid y_k \to 0, \text{ kun } k \to \infty \}$, missä y_k on yleisen tehtävän ratkaisu ja h on kiinteä askelpituus, $h > 0$.

Määritelmä 8.1.2 A-stabiilisuus

Menetelmä on A-stabiili, jos sen absoluuttisen stabiilisuuden alue sisältää koko vasemman puolitason.

Huomio: Absoluuttisen stabiilisuuden alueella pätee:

Jos $z_{k+1} = (1+h\lambda) z_k$, $z_k \neq y_k$, niin

$$z_{k+1} - y_{k+1} = (1+h\lambda)(z_k - y_k)$$

$$\Rightarrow |z_{k+1} - y_{k+1}| \leq |z_k - y_k|$$

Esimerkki 8.1.3 Implisiittinen Eulerin menetelmä

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_{k+1} \Rightarrow y_{k+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_k = \ldots = \frac{1}{(1-h\lambda)^{k+1}} y_0$$

Absoluuttinen stabiilisuus: $\{ h\lambda \mid |1-h\lambda| > 1 \}$

$$|1-h\lambda| = \sqrt{(1-h\operatorname{Re}\lambda)^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2} > 1, \quad \text{kun } \operatorname{Re}\lambda < 0.$$

Implisiittinen Eulerin menetelmä on A-stabiili.

Voidaan osoittaa, että eksplisiittisiä A-stabiileja lineaarisia moniaskelmenetelmiä ei ole olemassa.

Lause 8.1.4 Korkeimman kertaluvun A-stabiililla moniaskel-menetelmällä on kertaluku $= 2$.

Masentavaa. On kuitenkin mahdollista laatia menetelmiä, joilla on korkea kertaluku ja joiden absoluuttisen stabiilisuuden alue on "melkein" koko vasen puolitaso.

8.2 Erityisiä menetelmiä

<u>BDF-menetelmät</u> : Backward Differentiation Formulas

m-askel menetelmä kertalukua m :
$$\sum_{l=0}^{m} a_l y_{k+l} = h b_m f(t_{k+m}, y_{k+m})$$

Kaikki implisiittisiä.

Patee:

<u>Lause 8.2.1</u> Moniaskelmenetelmän katkaisuvirheen kertaluku $p \geq 1$, jos ja vain jos
$$\sum_{l=0}^{m} a_l = 0 \quad \text{ja} \quad \sum_{l=0}^{m} l^j a_l = j \sum_{l=0}^{m} l^{j-1} b_l , \; j = 1, \dots, p.$$

Lauseen avulla valitaan sopivia kertoimia:

$m = 1$: $a_0 + a_1 = 0$, $0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 = b_1$

Valitaan (aina) $a_1 = 1 \Rightarrow a_0 = -1$, $b_1 = 1$

Saadaan : $y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1})$

eli implisiittinen Euler.

Näin jatketaan, mutta kun $m = 3$, ei saatu menetelmä voi olla A-stabiili.

<u>IRK-menetelmät</u> : Implicit Runge-Kutta

$$\xi_j = y_k + h \sum_{i=1}^{\nu} a_{ji} f(t_k + c_i h, \xi_i), \quad j = 1, \dots, \nu,$$

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{j=1}^{\nu} b_j f(t_k + c_j h, \xi_j)$$

Vapaat parametrit : a_{ji}, b_j, c_j , konsistenssi : $\sum_{i=1}^{\nu} a_{ji} = c_j$, $j = 1, \dots, \nu$.

Kaikille $\nu \geq 1$ on olemassa yksikäsitteinen A-stabiili IRK kertalukua 2ν.

8.3 Implisiittiset systeemit

Moniaskelmenetelmät : $b_m \neq 0$

$$\underline{y}_{k+m} = h b_m \underline{f}(t_{k+m}, \underline{y}_{k+m}) + \underline{\gamma} ,$$

missä $$\underline{\gamma} = h \sum_{l=0}^{m-1} b_l \underline{f}(t_{k+l}, \underline{y}_{k+l}) - \sum_{l=0}^{m-1} a_l \underline{y}_{k+l}$$

on tunnettu.

IRK :
$$\begin{pmatrix} \underline{\xi}_1 \\ \vdots \\ \underline{\xi}_\nu \\ \underline{y}_{k+1} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{\nu} a_{1i} \underline{f}(t_k + c_i h, \underline{\xi}_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{\nu} a_{\nu i} \underline{f}(t_k + c_i h, \underline{\xi}_i) \\ \sum_{j=1}^{\nu} b_j \underline{f}(t_k + c_j h, \underline{\xi}_j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{y}_k \\ \vdots \\ \underline{y}_k \\ \underline{y}_k \end{pmatrix}$$

Yleinen muoto : $\underline{w} = h \underline{g}(\underline{w}) + \underline{\gamma}$;

$$\underline{q}(\underline{w}) \equiv \underline{w} - h \underline{g}(\underline{w}) - \underline{\gamma} = \underline{0}$$

Newtonin menetelmä :

Alkuarvaus $\underline{w}^{(0)}$; Taylorin kehitelmä $\underline{q}$:lle $\underline{w}^{(0)}$:ssa :

$$\begin{pmatrix} q_1(w_1, \dots, w_n) \\ \vdots \\ q_n(w_1, \dots, w_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1(w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}) \\ \vdots \\ q_n(w_1^{(0)}, \dots, w_n^{(0)}) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_1}{\partial w_i}(\underline{w}^{(0)})(w_i - w_i^{(0)}) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_n}{\partial w_i}(\underline{w}^{(0)})(w_i - w_i^{(0)}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{O}(\|\underline{w} - \underline{w}^{(0)}\|^2) \\ \vdots \\ \mathcal{O}(\|\underline{w} - \underline{w}^{(0)}\|^2) \end{pmatrix}$$

eli matriisimuodossa:

$$\underline{g}(\underline{w}) = \underline{g}(\underline{w}^{(0)}) + \underbrace{J_{\underline{g}}(\underline{w}^{(0)})}_{\text{Jakobiaani evaluoituna pisteessä } \underline{w}^{(0)}}(\underline{w} - \underline{w}^{(0)}) + \mathcal{O}(\|\underline{w} - \underline{w}^{(0)}\|^2)$$

Pudotetaan kvadraattinen termi pois ja ratkaistaan $\underline{g}(\underline{w}) = \underline{0}$:

$$\underline{w}^{(1)} = \underline{w}^{(0)} - \left[J_{\underline{g}}(\underline{w}^{(0)})\right]^{-1} \underline{g}(\underline{w}^{(0)}),$$

on saatu Newtonin menetelmän askel.

Havaintoja: a) Matriisin kääntäminen tarkoittaa yhtälöryhmän ratkaisua.

b) Jakobiaanin on oltava säännöllinen.

c) Alkuarvauksen on oltava tarpeeksi hyvä.

Tässä kontekstissa: $\underline{g}(\underline{w}) = \underline{0}$; saadaan

$$\underline{w}^{(j+1)} = \underline{w}^{(j)} - \underbrace{\left[I - h J_{\underline{g}}(\underline{w}^{(j)})\right]}_{\text{Riittävän pienillä } h \text{ aina säännöllinen.}}{}^{-1}(\underline{w}^{(j)} - h\underline{g}(\underline{w}^{(j)}) - \underline{y})$$

Tulkinta: Ennuste-askeleen virhe saa olla luokkaa $\mathcal{O}(h)$.